

Sintonización y evaluación de observadores lineales proporcionales Luenberger mediante asignación de polos para la cristalización por lotes

Tuning and evaluation of proportional linear Luenberger observers by pole placement for batch crystallization

Maximiliano López-Morales¹, María de Jesús García-Gómez⁴, Cirilo Nolasco-Hipólito⁴, Raúl Colorado-Peralta⁴, Oscar Núñez-Gaona⁴, Alfonso Flores-Meza³, Jesús Carrillo-Ahumada^{4*}

¹ Centro de Investigaciones Científicas, Instituto de Biotecnología, Universidad del Papaloapan, Circuito Central 200 Parque Industrial, San Juan Bautista Tuxtepec, Oaxaca, México.

² Facultad de Ciencias Químicas, Universidad Veracruzana, Prolongación de Oriente 6, No. 1009, C.P. 94340, Orizaba, Veracruz, México.

³ Universidad del Istmo, Campus Tehuantepec. Ciudad Universitaria S/N, Barrio Santa Cruz, 4^a. Sección, Santo Domingo Tehuantepec, Oaxaca, México, C.P. 70760.

⁴ Universidad del Papaloapan, Circuito Central 200, colonia Parque Industrial, Tuxtepec, Oax. 68301, México.

*Correspondencia: jesuscarrillo18@yahoo.com (Jesús Carrillo Ahumada)

DOI: <https://doi.org/10.54167/tch.v19i2.1918>

Recibido: 29 de abril de 2025; **Aceptado:** Fecha de aceptación 23 de junio de 2025

Publicado por la Universidad Autónoma de Chihuahua, a través de la Dirección de Investigación y Posgrado.

Editor de Sección: Dra. Luz Araceli Ochoa Martínez

Resumen

La cristalización es una operación unitaria ampliamente utilizada en diversos sectores industriales, como en la obtención de productos farmacéuticos, alimentarios y químicos finos, donde se requiere alta pureza y control del tamaño de partícula. Aunque ofrece ventajas operativas significativas, también presenta desafíos en el monitoreo de variables. El monitoreo en línea de la cristalización suele requerir instrumentación costosa y técnicamente compleja. Una alternativa viable es el uso de observadores lineales proporcionales Luenberger (OLPLs), herramientas basadas en software derivadas de modelos matemáticos que representan el proceso. Este estudio tuvo como objetivo diseñar observadores lineales proporcionales Luenberger (OLPLs) mediante una metodología de asignación de polos. El sistema propuesto se basó en el modelo de Mesbah et al. (2011) para la cristalización de sulfato de amonio y agua. A diferencia de los observadores mostrados por Mesbah et al., (2011), el presente estudio muestra como un OLPLs correctamente sintonizado, puede estimar con precisión todos los estados cuando son medibles. Como resultado, se obtuvo un conjunto de OLPLs, y se seleccionó el de mejor desempeño con base en métricas de rendimiento específicas,

obteniendo resultados satisfactorios. Este trabajo contribuye al desarrollo de alternativas eficientes y de bajo costo para el monitoreo de la cristalización en aplicaciones industriales.

Palabras clave: procesos industriales, ingeniería de procesos, observadores de estado, simulación.

Abstract

Crystallization is a widely used unit operation in various industrial sectors, such as in the production of pharmaceutical, food, and fine chemical products, where high purity and precise particle size control are required. While it offers significant operational advantages, it also presents challenges in variable monitoring. Online crystallization monitoring often requires expensive and technically complex instrumentation. A viable alternative is the use of proportional linear Luenberger observers (PLLOs), which are software-based tools derived from mathematical models representing the process. This study aimed to design proportional linear Luenberger observers (PLLOs) using a pole placement methodology. The proposed system was based on the model by Mesbah et al. (2011) for ammonium sulfate and water crystallization. Unlike the observers presented by Mesbah et al. (2011), the present study demonstrates how a properly tuned proportional Luenberger observer (PLLOs) can accurately estimate all states when they are measurable. As a result, a set of PLLOs was obtained, and the best-performing one was selected based on specific performance metrics, demonstrating satisfactory results. This work contributes to the development of cost-effective and reliable alternatives for crystallization monitoring in industrial applications.

Keywords: industrial processes, process engineering, state observer, simulation.

1. Introducción

La cristalización es una operación unitaria utilizada para la separación de un soluto presente en una mezcla mediante la formación de partículas (cristales), obteniendo así un producto con un alto nivel de pureza. Se realiza a partir de una solución sobresaturada, y en muchos casos se emplean métodos adicionales como evaporación, enfriamiento, adición de solventes o precipitantes para inducir la nucleación y el crecimiento de los cristales (Nagy y Braatz, 2012). La cristalización juega un papel clave en la separación y purificación de sustancias en procesos industriales, ya sea en etapas intermedias o finales (Lewiner et al., 2002).

Este proceso tiene múltiples aplicaciones en la industria:

- Industria farmacéutica: Obtención de paracetamol (Lima et al., 2024; Kalakech et al., 2025), L-alanina (Albert et al., 2024) y naproxeno (Barzegar-Jalali et al., 2024).
- Industria alimentaria: Producción de ácido succínico (Hutagaol et al., 2025), lactosa (Wen et al., 2025), cristalización de soluciones de caña de azúcar (Sánchez-Sánchez et al., 2020; Morales et al., 2024; Karimidatsjerd et al., 2025) y cristalización de azúcar de remolacha (Piri et al., 2024).
- Industria agropecuaria: Producción de fertilizantes como el ácido glutámico (Sun et al., 2024; Song et al., 2025) y obtención del ácido amino-benzoico (Hussain et al., 2024).

- Industria química: Obtención de sulfato de potasio (K_2SO_4) y nitrato de potasio (KNO_3) (Kim et al., 2023; Xu et al., 2024).

En los procesos de cristalización y en otros procesos particulados, la distribución del tamaño de partícula (DTC) influye directamente en la calidad del producto final. Actualmente, el monitoreo en línea de la cristalización requiere instrumentación costosa y representa un reto para los ingenieros de proceso. Una alternativa viable para el monitoreo de la cristalización son los observadores de estado, herramientas basadas en software diseñadas a partir de modelos matemáticos que representan el proceso. Aunque existen metodologías para la estimación de parámetros en cristalizadores con ruido blanco, como el filtro de Kalman (Liu et al., 2022), en este trabajo se utiliza el observador Luenberger con el objetivo de establecer una metodología de sintonización. La motivación de este estudio es desarrollar una metodología para la sintonización de observadores Luenberger mediante la asignación estructurada de ganancias. Se propone la sintonización de observadores lineales proporcionales Luenberger (OLPLs) mediante una metodología de colocación de polos para la estimación de parámetros no medibles directamente en la cristalización de sulfato de amonio y agua.

Se partió de un modelo no lineal propuesto por Mesbah et al. (2011), que fue posteriormente linealizado para facilitar su estudio. Se utilizó la fórmula de Ackermann para la sintonización de observadores y se diseñaron observadores considerando la minimización del error de convergencia. Finalmente, se evaluó el desempeño del sistema-observador mediante métricas específicas. El documento está organizado de la siguiente manera: La Sección 2 está dividida en dos partes. La primera describe las generalidades de los observadores de estado, con un enfoque específico en los observadores de Luenberger con estructura proporcional, su sintonización, métricas de evaluación y aplicación en cristalización. La segunda parte detalla el sistema de estudio propuesto por Mesbah et al. (2011). La Sección 3 presenta la metodología utilizada para la sintonización y evaluación de los observadores. En la Sección 4 se exponen los resultados obtenidos, incluyendo la linealización del sistema no lineal, la generalización del conjunto de observadores proporcionales (OP), la simulación y la evaluación del caso de estudio-observador. Finalmente, se presentan las conclusiones del estudio.

2. Materiales y métodos

2.1 Materiales

2.1.1 Observadores de estado

El concepto de observabilidad es fundamental en diversas áreas de la cristalización, como el control automático (Chiu y Christofides, 1999 (a, b); El-Farra et al., 2004; Montes et al., 2021) y la estimación de parámetros (Brivadis et al., (2020, 2021)). Para sistemas lineales determinísticos, uno de los observadores más utilizados es el observador tipo Luenberger, debido a su simplicidad estructural, bajo costo computacional y su capacidad para reconstruir con precisión las variables de estado. Este tipo de observador se diseña de modo que el error de estimación entre el sistema real y el sistema estimado, definido como:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad \text{Ec. (1)}$$

converja a cero en forma asintótica bajo ciertas condiciones de diseño. Esta propiedad garantiza un comportamiento estable y preciso, incluso ante incertidumbres iniciales. Su bajo requerimiento computacional lo hace ideal para implementaciones en tiempo real, especialmente en entornos industriales con recursos limitados.

2.1.2 Observadores Luenberger

El diseño de este tipo de observadores está basado en el conocimiento completo del modelo dinámico del sistema, y puede implementarse tanto en forma de orden completo como de orden reducido. Existen diferentes configuraciones estructurales, siendo las más comunes los observadores proporcionales (P), proporcionales-integrales (PI) entre otros. En este trabajo de investigación se utilizan los observadores proporcionales (OP) debido a su estructura sencilla, fácil implementación y buena capacidad de estimación en sistemas linealizados, características que los hacen especialmente adecuados para aplicaciones industriales con restricciones computacionales.

2.1.3 Observadores Proporcionales (OP)

Se puede considerar un sistema linealizado de la siguiente forma:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad \text{Ec. (2)}$$

$$y = Cx \quad \text{Ec. (3)}$$

donde $x \in R^{n \times 1}$ es el vector de variables de estado, $u \in R^{c \times 1}$ es el vector de variables de entrada, $y \in R^{r \times 1}$ es el vector de salidas medidas que pueden ser tomadas para realizar observación y A, B y C son matrices constantes que definen la dinámica lineal del sistema. Por otro lado, la expresión del observador es la siguiente:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + K_p(y - C\hat{x}) \quad \text{Ec. (4)}$$

Donde $\hat{x} \in R^{n \times 1}$ es el vector de estado estimado y $K_p \in R^{r \times r}$ es la matriz de ganancias proporcionales. La ecuación del error es:

$$\frac{de}{dt} = (A - K_p C)e \quad \text{Ec. (5)}$$

esta expresión (Ec. 5) muestra que la estabilidad del error depende de la colocación de los valores propios de la matriz $(A - K_p C)$. Por lo tanto, la selección adecuada de K_p permite garantizar la convergencia del error a cero en el tiempo, y por lo tanto su estabilidad, lo cual es fundamental para la confiabilidad del observador. Algunas metodologías para determinar K_p se basan en la ecuación de Riccati (Farza et al., 2011), en el polinomio de Butterworth y en la fórmula de Ackermann para la colocación de polos (Di Ruscio, 2009).

2.1.4 Sintonización de observadores mediante colocación de polos

Los polos del sistema en lazo cerrado se pueden colocar en cualquier ubicación deseada (bajo ciertas restricciones) mediante retroalimentación de estado a través de una matriz de ganancia de retroalimentación de estado apropiada. La colocación de polos se ha utilizado en el diseño de observadores de estado para diversas aplicaciones, como el diagnóstico de fallas en reactores CSTR (Kamatchi et al., 2021), el diseño de observadores adaptativos (Kojabadi y Chang, 2005; Volpato y Vieira 2020) y la mejora de la respuesta de salida de los sistemas.

2.1.5 Métricas de estabilidad, desempeño y sintonización

Un sistema-observador es estable si todas las partes reales de los valores propios (λ_i) de la matriz $A_{lc,p}$ son negativas. Por lo tanto:

$$Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad \text{Ec. (6)}$$

$$A_{lc,p} = (A - K_p C) \quad \text{Ec. (7)}$$

$$r = Re(\lambda_i) \quad \text{Ec. (8)}$$

$$r_{in} = -r \quad \text{Ec. (9)}$$

Para realizar la evaluación de OP, se utiliza una métrica de convergencia para cada estado estimado y el estado original correspondiente:

$$e_{conv} = \sum_{i=1}^n |x_{original} - x_{estimado}| \quad \text{Ec. (10)}$$

Para la generación del conjunto y elección del observador a utilizar, se tienen los siguientes pasos: Se normalizan entre 0 y 1 todos los valores de la métrica de e_{conv} (Ec. 10) y de r (Ec. 8) del conjunto de observadores obtenidos.

a) Posteriormente, se utiliza la siguiente suma de índices:

$$W = e_{conv.1} + e_{conv.2} + \dots + e_{conv.n} + r \quad \text{Ec. (11)}$$

Proporcionando la misma ponderación para todos los índices.

b) Para la elección del observador, se utiliza al observador que tenga el mínimo valor de W (Ec. 11).

c) Para la evaluación del OP en el sistema no lineal se utiliza el error cuadrático medio normalizado:

$$ECMN = \sqrt{\sum_{i=0}^n \left(\frac{x_i - \hat{x}_i}{x_i} \right)^2} \quad \text{Ec. (12)}$$

Donde $\hat{x}_i$ son los estados estimados, x_i son los estados del sistema, el índice i es el i -ésimo punto de datos y n representa el número de datos utilizados para el cálculo.

2.1.6 Observadores aplicados a la cristalización

Algunos trabajos de investigación que han estimado parámetros utilizando observadores para la cristalización son: estimación de masa de cristales (Damour et al., 2010 (a, b)), concentración de soluto (Brivadis et al., 2020), Distribución del Tamaño de Cristal (DTC) (Brivadis et al., 2020; Brivadis y Sacchelli, 2021; Kamatchi Kannan et al., 2021), tamaño medio de los cristales (Farza et al., 2011; Afsi et al. 2020), y control mediante el uso de observadores (Rigatos et al., 2020).

2.1.7 Sistema de estudio: Cristalizador propuesto por Mesbah et al. (2011)

Las características que debe poseer un modelo matemático para la operación unitaria de la cristalización según Rawlings et al., 1993 son: balance de población, balance de materia y energía y relaciones constitutivas (crecimiento y nucleación). De manera general el balance de población se puede describir como:

$$\frac{\partial nV}{\partial t} + V \frac{\partial Gn}{\partial L} + VB_0 \delta(L - L_0) - \sum_k Q_k n_k \quad \text{Ec. (13)}$$

Con la condición límite $n(0, t) = \frac{B_0}{G|_{L=0}}$, donde t es el tiempo, n es la densidad de población, V es el volumen, G es la velocidad de crecimiento, L es la longitud de cristal, $\delta(L - L_0)$ es la delta de Dirac actuando en $L = L_0$, Q_k y n_k es la velocidad de flujo volumétrico y la función de DTC de la k -ésima corriente, respectivamente. La Ec. (13) puede ser resuelta por medio de la metodología del elemento finito, o bien mediante la técnica de momentos. La técnica de momentos ha permitido obtener la solución de la Ec. (13) en un número menor de ecuaciones diferenciales que las técnicas de discretización. La técnica de momentos ha tenido la siguiente generalización:

- Cristalización por lotes a vacío con variación de volumen (Carrillo-Ahumada, 2006):

$$\frac{d\mu_0}{dt} = B_0, \frac{d\mu_i}{dt} = iG\mu_{i-1}(1 + \ln(V)) \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

- Cristalización por lotes sin variación de volumen (Nagy et al., 2008; Sanzida y Nagy, 2013):

$$\frac{d\mu_0}{dt} = B_0, \frac{d\mu_i}{dt} = iG\mu_{i-1} + Br_0^i \text{ para todo } i = 1, \dots, n \text{ donde } r \text{ es el tamaño de cristales.}$$

- Cristalización por lotes y operación isotérmica (Zhang y Rohani, 2003):

$$\frac{d\mu_0}{dt} = B_0, \frac{d\mu_i}{dt} = iG\mu_{i-1}$$

- Cristalización por lotes considerando volumen (Mesbah et al., 2011):

$$\frac{d\mu_0}{dt} = B_0 - \frac{\mu_0 Q_p}{V}, \frac{d\mu_i}{dt} = iG\mu_{i-1} - \frac{\mu_i Q_p}{V} \quad \text{Ec. (14)}$$

El modelo descrito por Mesbah et al. (2011) representa a la DTC (μ_i) y a la concentración de soluto (C) en forma de ecuaciones diferenciales. Las expresiones matemáticas empíricas para la velocidad de nucleación total y la velocidad de crecimiento de cristal independiente del tamaño son:

$$B_0 = k_b \mu_3 G \quad \text{Ec. (15)}$$

$$G = k_g (C - C^*)^g \quad \text{Ec. (16)}$$

Cabe mencionar que la fuerza motora para la creación de cristales es la sobresaturación. El conjunto de ecuaciones descrito en Ec. (14) puede ser rescrito por la técnica de pesos residuales como:

$$\frac{d\mu_0}{dt} = B_0 - \frac{\mu_0 Q_p}{V} \quad \text{Ec. (17)}$$

$$\frac{d\mu_1}{dt} = G\mu_0 - \frac{\mu_1 Q_p}{V} \quad \text{Ec. (18)}$$

$$\frac{d\mu_2}{dt} = 2G\mu_1 - \frac{\mu_2 Q_p}{V} \quad \text{Ec. (19)}$$

$$\frac{d\mu_3}{dt} = 3G\mu_2 - \frac{\mu_3 Q_p}{V} \quad \text{Ec. (20)}$$

$$\frac{d\mu_4}{dt} = 4G\mu_3 - \frac{\mu_4 Q_p}{V} \quad \text{Ec. (21)}$$

Las condiciones iniciales son $\mu_i(t_0) = \mu_{i,0}$ y $C(t_0) = C_0$. Debido a que el proceso se lleva a cabo en una operación isotérmica del cristalizador mediante evaporación, las ecuaciones de balance de masa y energía pueden ser simplificadas a expresiones para la concentración de soluto:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{k_0 + 3K_v G \mu_2 (k_1 + C)}{(1 + k_v \mu_3)} + \frac{k_2 H_{in}}{1 + K_v \mu_3} \quad \text{Ec. (22)}$$

Con las ecuaciones algebraicas:

$$k_0 = \frac{Q_p (C^* - C)}{V} \quad \text{Ec. (23)}$$

$$k_1 = \frac{H_v C^*}{H_v - H_L} \left(\frac{\rho_C}{\rho_L} - 1 + \frac{\rho_L H_L - \rho_C H_C}{\rho_L H_v} \right) - \frac{\rho_C}{\rho_L} \quad \text{Ec. (24)}$$

$$k_2 = \frac{C^*}{V \rho_L (H_v - H_L)} \quad \text{Ec. (25)}$$

Los detalles de los parámetros que describen al modelo son mostrados en la sección Nomenclatura.

2.2 Métodos

En este trabajo de investigación, se considera que todas las salidas son medibles en el proceso de cristalización. A partir de esta consideración, se implementó un algoritmo iterativo basado en la asignación progresiva de polos para sintonizar observadores proporcionales tipo Luenberger

(OLPLs) y evaluar su desempeño. La metodología se compone de los siguientes pasos, los cuales se describen a continuación:

Algoritmo. Sintonización y evaluación de OLPLs para el proceso de cristalización.

1: Inicio

Se definieron los objetivos y se seleccionó el modelo dinámico del cristizador. Posteriormente se programó en Matlab™, las rutinas numéricas para realizar la linealización del sistema, la generación del conjunto de observadores, y la evaluación de su desempeño mediante simulaciones en el dominio del tiempo.

2: Linealizar el modelo no lineal del cristizador propuesto por Mesbah et al. (2011), Ecs. (17)-(25).

El modelo de Mesbah et al. (2011) fue linealizado, es decir, se aproximó el sistema original a ecuaciones más simples que lo representan cerca de un punto de operación en específico, considerando las condiciones iniciales del proceso. Por lo tanto, se obtuvo un sistema en forma matricial $\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$ lo cual es necesario para el diseño de observadores lineales.

3: Determinar los valores propios de la matriz característica del sistema (r) (Ec. 8).

Se calcularon los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ como referencia inicial para diseñar una familia de observadores con diferentes velocidades de convergencia.

4: Asignar un valor inicial de incremento de los valores propios de la matriz característica (j).

Se estableció un rango de incremento desde 0 % hasta 100 % aplicado sobre los valores propios del sistema. En cada iteración, se generó un nuevo conjunto de polos deseados al multiplicar los valores originales por un factor de escala j , el cual se aumentó progresivamente en tamaño de paso de 0.05.

5: Mientras.

Los valores propios iniciales $\leq$ los valores propios incrementados al 100 % ($r_{in} \leq r_{in}(j)$). Se implementó una estructura iterativa en la cual los valores propios del sistema se modificaron progresivamente. En cada iteración, se generó un nuevo conjunto de polos incrementando los valores propios originales por un factor de escala j , lo que permitió explorar como distintas colocaciones de polos afectan la dinámica del observador. El proceso se repitió hasta alcanzar un incremento máximo del 100%.

6: Incrementar j ($j = j + 0.05$).

En cada iteración del algoritmo, el valor del factor j se incrementó con un tamaño de paso de 0.05. Este tamaño de paso aseguró una cobertura del espacio de los polos posibles, manteniendo el control sobre la velocidad de convergencia del error de estimación.

7: Fin-mientras.

El bucle de iteración se detuvo una vez que el incremento j alcanzó el valor máximo establecido (100 %). Con ello se generó un conjunto completo de observadores proporcionales con polos ubicados en diferentes espacios.

8: Evaluar el desempeño del conjunto de OP (Ec. 10) en el dominio del tiempo con un intervalo de 0 a 1000 s.

Cada observador fue evaluado mediante simulaciones en el dominio del tiempo. Se utilizó una métrica definida en la Ec. (10) para calcular el error de convergencia entre los estados reales y los estimados por cada observador.

9: Seleccionar el observador, considerando el mínimo valor de la Ec. (11).

Para cada observador, se calculó el índice de desempeño W (Ec. 11) que combina el error de estimación y la magnitud del desplazamiento aplicado. Se seleccionó el observador que presentó el menor valor de W , considerándolo como el óptimo para el sistema-observador.

10: Fin.

Con el observador óptimo identificado, el procedimiento concluyó. Este observador fue posteriormente aplicado y evaluado dentro del modelo no lineal del cristizador para validar su desempeño y robustez.

3. Resultados y discusión

3.1 Caso de estudio

Para la aplicación del OLPL en el sistema propuesto por Mesbah et al., (2011) se considera el siguiente caso de estudio. En el modelo no lineal, Ecs. (17)-(22) y sus ecuaciones complementarias (Ecs. (23)-(25)), el estado seis (concentración de soluto, C) se encuentra disponible para una medición directa. Aunque no forma parte del vector de estados estimados por el observador, su disponibilidad permite incorporarla en el proceso de linealización del modelo para definir adecuadamente las matrices dinámicas del sistema.

3.2 Linealización del modelo no lineal

Se considera que el modelo descrito por las Ecs. (17)-(25) pueden ser generalizado por Ecs. (2)-(3). Donde $\mathbf{x}' = (\mu_0, \dots, \mu_4, C)$ son las variables de estado, $\mathbf{u} = H_{in}$ es la entrada al sistema. Considerando para la linealización, los siguientes valores en estado estacionario: Los valores iniciales de los momentos de la DTC se consideraron como $\mu_{0s} = \mu_{1s} = \mu_{2s} = \mu_{3s} = \mu_{4s} = 0.001$, ya que en las etapas iniciales del proceso estos momentos suelen presentar valores muy pequeños. Por otro lado, $C_s = 0.5$, $H_{ins} = 9.0$ se seleccionaron considerando que se encuentran dentro de los rangos operativos utilizados por Mesbah et al., (2011).

Cabe destacar que, si bien la concentración de soluto (C) no forma parte del vector de estados estimados por el observador, se utilizó durante el proceso de linealización para definir adecuadamente la estructura de las matrices dinámicas $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$. En particular, aunque la concentración de soluto no es una entrada al sistema, interviene de manera funcional en la construcción de la dinámica del modelo y, por tanto, en el cálculo de las ganancias del observador. Esta consideración permite preservar la coherencia entre el modelo linealizado y el comportamiento del sistema no lineal original. Por lo tanto, las matrices en espacio de estado son definidas como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_{61} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C}_{(5 \times 5)} &= \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{Ec. (26)}$$

donde $a_{11} = -5.82 \times 10^{-5}$, $a_{21} = 3.0 \times 10^{-6}$, $a_{22} = -2.30 \times 10^{-5}$, $a_{32} = 6.0 \times 10^{-6}$, $a_{33} = -2.30 \times 10^{-5}$, $a_{43} = 9.0 \times 10^{-6}$, $a_{44} = -2.30 \times 10^{-5}$, $a_{54} = -2.30 \times 10^{-5}$, $a_{64} = 7.14 \times 10^{-6}$, $a_{55} = -2.30 \times 10^{-5}$; $b_{61} = 1.94 \times 10^{-6}$ con los valores de las matrices (Ec. 26) es posible obtener el conjunto de OLPLs.

3.3 Generación del conjunto de OP

Después de aplicar la metodología descrita anteriormente, se generó un conjunto de OLPLs, en los cuales cada observador comparte la misma estructura: Una matriz de ganancias $\mathbf{K}_p$ de tipo diagonal ($\text{Diag}(\mathbf{K}_p(i, i))$ para $i = 1, \dots, 5$). Para cada incremento, aplicado a los valores propios del sistema, se construyó un nuevo observador y se evaluó su desempeño mediante simulaciones en el dominio del tiempo. Estas simulaciones se resolvieron utilizando el método de Runge-Kutta 4to orden, con las condiciones iniciales del sistema: $\mu_{0s} = \mu_{1s} = \mu_{2s} = \mu_{3s} = \mu_{4s} = 0.001$ y $C_s = 0.5$. El desempeño de cada observador se evaluó utilizando el índice $\mathbf{W}$ definido en la Ec. (11), y se registraron los valores correspondientes a la diagonal de $\mathbf{K}_p$ y los incrementos aplicados sobre los valores propios. Estos resultados son mostrados en la Fig. (1).

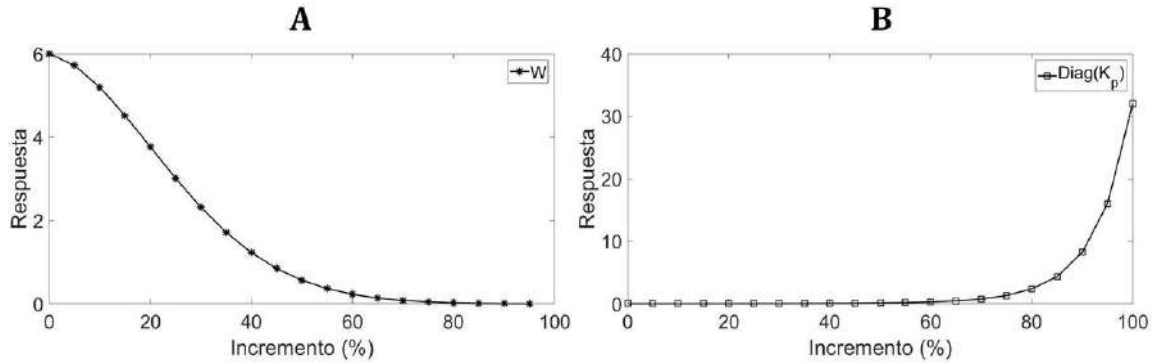


Figura. 1. Respuesta del sistema ante diferentes incrementos porcentuales. La subfigura (A) muestra la evolución de la sumatoria de índices W , mientras que (B) presenta la respuesta de la diagonal de la matriz de ganancias proporcionales $\text{Diag}(K_p)$.

Figure. 1. System response to different percentage increments. Subfigure (A) shows the evolution of the summation of indices W , while (B) presents the response of the proportional gain matrix diagonal $\text{Diag}(K_p)$.

Como se observa en la Fig. 1, conforme se incrementa los valores propios de la matriz característica, el valor de W disminuye, aunque con un incremento del 100 % el valor de este índice tiende al peor desempeño del sistema-observador. Por otro lado, el valor de la diagonal de K_p se incrementa. Por lo tanto, conforme a la elección del observador se propone el que presenta un valor de $W = 0$, $\text{Diag}(K_p) = 15.99$ y un incremento de 95 %.

Este resultado confirma que, a diferencia de estrategias con observadores no estructurados como los utilizados por Mesbah et al. (2011), un OLPL adecuadamente sintonizado puede mantener estabilidad incluso ante incrementos agresivos en los polos. Además, la estabilidad obtenida en este punto sugiere que la selección automática basada en el índice W es una alternativa eficiente frente a métodos empíricos tradicionalmente empleados en el diseño de observadores.

3.4 Simulación y evaluación del sistema no lineal-observador

Para validar la estimación del conjunto de OLPLs, se realizaron diferentes simulaciones numéricas en dominio del tiempo ($0 \leq t \leq 1000$ s) del sistema no lineal (Ecs. (17)-(22)) con las condiciones iniciales originales ($\mu_{0s} = \mu_{1s} = \mu_{2s} = \mu_{3s} = \mu_{4s} = 0.001$) con el siguiente conjunto de condiciones iniciales para el observador:

$$\text{CI1: } \hat{\mu}_{0s} = \hat{\mu}_{1s} = \hat{\mu}_{2s} = \hat{\mu}_{3s} = \hat{\mu}_{4s} = 0.001.$$

$$\text{CI2: } \hat{\mu}_{0s} = 3.49 \times 10^9, \hat{\mu}_{1s} = 7.0 \times 10^5, \hat{\mu}_{2s} = 282.11, \hat{\mu}_{3s} = 0.1708, \hat{\mu}_{4s} = 0.0011 \text{ (se eligieron en base al valor máximo del sistema en lazo abierto).}$$

Las ecuaciones que describen al observador con el sistema no lineal son las siguientes:

$$\frac{d\hat{\mu}_0}{dt} = B_0 - \frac{\hat{\mu}_0 Q_p}{V} + K_{p,(1,1)}(\mu_0 - \hat{\mu}_0) \quad \text{Ec. (27)}$$

$$\frac{d\hat{\mu}_1}{dt} = G\hat{\mu}_0 - \frac{\hat{\mu}_1 Q_p}{V} + K_{p,(2,2)}(\mu_1 - \hat{\mu}_1) \quad \text{Ec. (28)}$$

$$\frac{d\hat{\mu}_2}{dt} = 2G\hat{\mu}_1 - \frac{\hat{\mu}_2 Q_p}{V} + K_{p,(3,3)}(\mu_2 - \hat{\mu}_2) \quad \text{Ec. (29)}$$

$$\frac{d\hat{\mu}_3}{dt} = 3G\hat{\mu}_2 - \frac{\hat{\mu}_3 Q_p}{V} + K_{p,(4,4)}(\mu_3 - \hat{\mu}_3) \quad \text{Ec. (30)}$$

$$\frac{d\hat{\mu}_4}{dt} = 4G\hat{\mu}_3 - \frac{\hat{\mu}_4 Q_p}{V} + K_{p,(5,5)}(\mu_4 - \hat{\mu}_4) \quad \text{Ec. (31)}$$

La respuesta por simulación de las ecuaciones del observador (Ecs. (27)-(32)) en dominio del tiempo es mostrado en las Figs (2)-(3). Como se observa en las Figs. (2)-(3), la simulación se realizó en dominio del tiempo $0 \leq t \leq 1000$ s. La convergencia entre los estados originales y los seis estados estimados ($\mu_0, \dots, \mu_4$) independientemente de la condición inicial (CI1 o CI2) se alcanza en un valor del tiempo menor de 1 segundo. Para evaluar el desempeño se utiliza la Ec. (12) para cada estado original y su respectivo estado estimado considerando CI1 y CI2 (Tabla I). Este tipo de respuesta rápida en estimación, independientemente de la condición inicial, es deseable en aplicaciones industriales donde se requiere reacción inmediata ante fluctuaciones del proceso. Resultados similares en robustez ante condiciones iniciales han sido reportados en controladores adaptativos como se observa en Kamatchi et al. (2021) y Carrillo-Ahumada (2006) ambos trabajos para aplicados a cristalización.

Tabla 1. Evaluación de la convergencia del estado original y el estado estimado.

Table 1. Evaluation of the convergence of the original state and the estimated state.

CI	ECMN1	ECMN2	ECMN3	ECMN4	ECMN5
1	0	0	0	0	0
2	3.49×10^{12}	7.0×10^8	2.93×10^5	176.36	0.1039

En la Tabla I se verifica de nuevo la convergencia que tienen todos los estados estimados hacia el estado original debido a que los valores mostrados en esta tabla son las condiciones iniciales que se utilizaron (CI1 o CI2). Por lo que se considera que este observador presenta un buen desempeño y robustez.

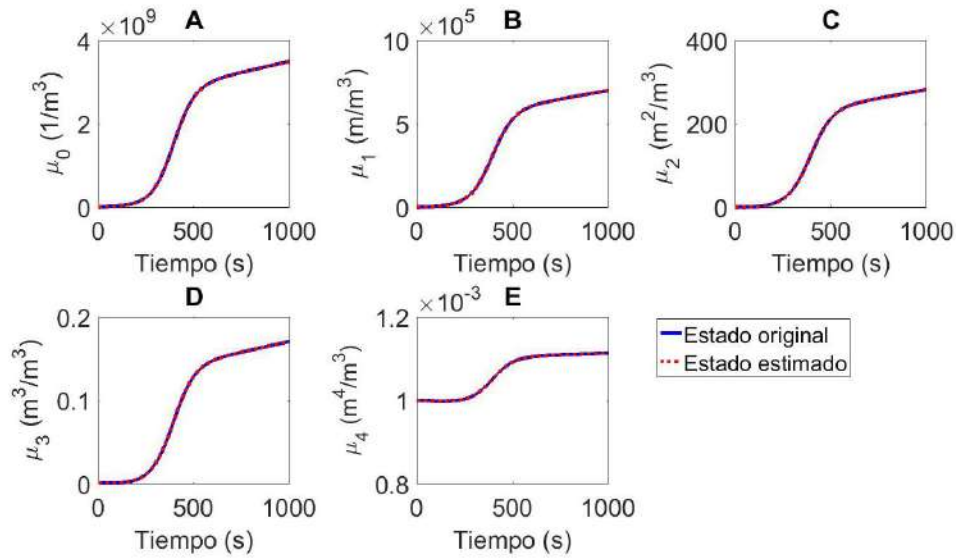


Figura. 2. Estimación de los momentos de la distribución de tamaño de cristal (DTC) bajo el conjunto de condiciones iniciales 1 (CI1). Las subfiguras muestran los resultados correspondientes al (A) momento cero, (B) momento uno, (C) momento dos, (D) momento tres y (E) momento cuatro.

Figure. 2. Estimation of the moments of the crystal size distribution (CSD) under initial condition set 1 (CI1). Subfigures show the results for the (A) zeroth moment, (B) first moment, (C) second moment, (D) third moment, and (E) fourth moment.

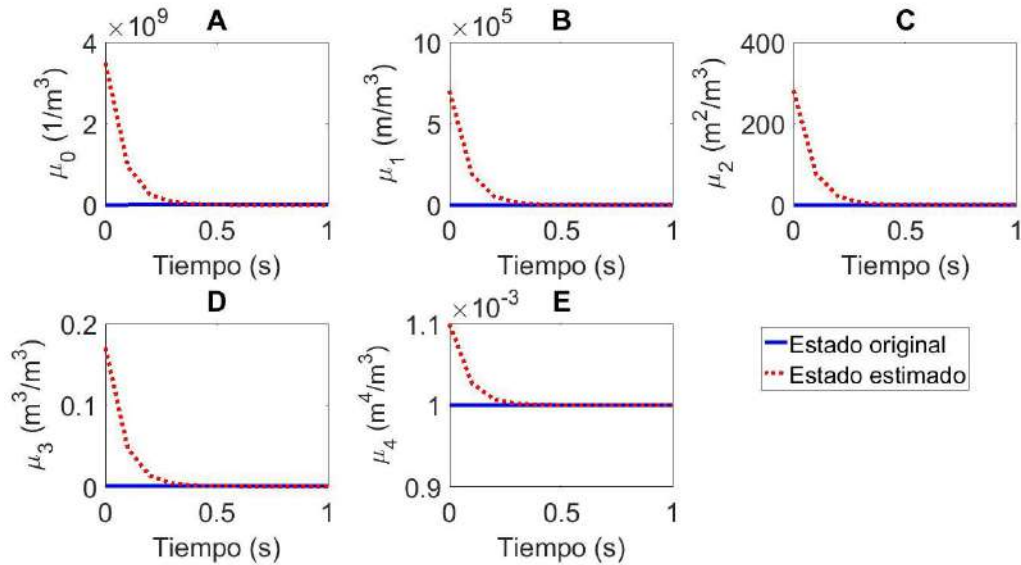


Figura. 3. Estimación de los momentos de la distribución de tamaño de cristal (DTC) bajo el conjunto de condiciones iniciales 2 (CI2). Las subfiguras muestran los resultados correspondientes al (A) momento cero, (B) momento uno, (C) momento dos, (D) momento tres y (E) momento cuatro.

Figure. 3. Estimation of the moments of the crystal size distribution (CSD) under initial condition set 2 (CI2). Subfigures show the results for the (A) zeroth moment, (B) first moment, (C) second moment, (D) third moment, and (E) fourth moment.

Además de las ecuaciones descritas por Mesbah et al., (2011), se puede utilizar el momento hipotético cinco con condición inicial $\mu_{5s} = 0.001$, descrito continuación:

$$\frac{d\mu_5}{dt} = 5G\mu_4 - \frac{\mu_5 Q_p}{V} \quad \text{Ec. (32)}$$

La desviación estándar y el diámetro promedio del cristal se calculan con las Ec. 32 y Ec. 33 (Hicks y Chope, 1999):

$$D(4,3) = \frac{\mu_4}{\mu_5} \quad \text{Ec. (33)}$$

$$S(4,3) = \sqrt{\left(\frac{\mu_5}{\mu_3}\right) - \left(\frac{\mu_4}{\mu_3}\right)^2} \quad \text{Ec. (34)}$$

estos parámetros son mostrados en la Fig (4). Aunque el presente trabajo se basa en el modelo dinámico propuesto por Mesbah et al. (2011) para la cristalización por lotes, no es posible realizar una comparación cuantitativa directa entre ambos estudios debido a que se emplean enfoques diferentes tanto en la estimación de estados como en la estructura de los observadores. Además, en el presente estudio se utilizan observadores lineales, los cuales son más sencillos de implementar en entornos industriales reales, donde los recursos de cómputo o el diseño de tiempo son limitados.

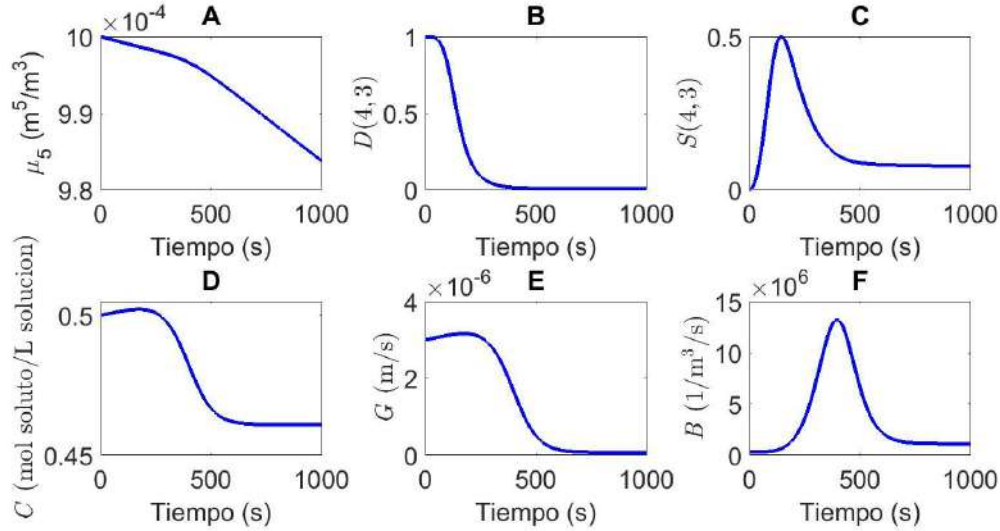


Figura. 4. Respuesta del sistema no lineal. Las subfiguras muestran: (A) el momento cinco, (B) el diámetro promedio de la DTC $D(4,3)$, (C) la desviación estándar $S(4,3)$, (D) la concentración del soluto, (E) la velocidad de crecimiento y (F) la velocidad de nucleación.

Figure. 4. Response of the nonlinear system. Subfigures show: (A) the fifth moment, (B) the average diameter of the CSD $D(4,3)$, (C) the standard deviation $S(4,3)$, (D) the solute concentration, (E) the growth rate, and (F) the nucleation rate.

Con lo que se observa que en $t < 250$ s el valor C y G presentan un comportamiento decreciente (Fig. 4D y 4E), por otro lado, B alcanza un punto máximo en $400 \leq t \leq 600$ s (Fig. 4F).

4. Conclusiones

Mediante la metodología propuesta en este trabajo de investigación es posible sintonizar observadores de estado proporcionales Luenberger a partir de la linealización de un modelo dinámico del proceso de cristalización por lotes. Los resultados obtenidos muestran se puede elegir un observador de un conjunto, con estabilidad y buen desempeño para el sistema en lazo cerrado. El enfoque desarrollado, aunque aplicado específicamente al proceso de cristalización de sulfato de amonio en solución acuosa, puede extenderse a otras operaciones unitarias en las que existan modelos matemáticos confiables, pero con limitaciones en la medición directa tales como fermentación, secado, entre otros. En conjunto, los resultados numéricos muestran no solo la viabilidad del diseño propuesto, sino su adaptabilidad ante condiciones variadas. La incorporación del momento cinco y los cálculos de la DTC agregan un análisis útil para aplicaciones reales, y refuerzan lo reportado por la comunidad de control de procesos sobre la importancia de controlar la distribución del tamaño de cristal en sistemas de cristalización. Como trabajo futuro, es posible utilizar OLPLs para utilizarlos junto con leyes de control en sistemas estables y también para inestables.

Nomenclatura

B_0	Velocidad de nucleación total ($\#/m^3/s$)
C	Concentración de soluto
C^*	Concentración de saturación, 0.46 kg soluto/kg solución
G	Velocidad de crecimiento del cristal (m/s)
g	Exponente de la velocidad de crecimiento de cristal específico del sistema, 1.0 adim
H_c	Calor específico del cristal, 60.75 KJ/kg
H_L	Calor específico de la solución, 69.86 KJ/kg
H_v	Calor latente de disolución, 2.56×10^3 KJ/kg
k_b	Constante de velocidad de nucleación, 1.02×10^{14} $\#/m^4$
k_g	Constante de la velocidad de crecimiento de cristal, 7.50×10^{-5} m/s
K_v	Factor de volumen adimensional, 0.43
μ_i	Momentos de DTC, m^i/m^3
μ_0	Momento cero, número total de cristales
μ_1	Momento uno, longitud de cristales
μ_2	Momento dos, área superficial de cristales

μ_3	Momento tres, volumen total de cristales
μ_4	Momento cuatro, momento hipotético para calcular la media del tamaño de cristal
μ_5	Momento cinco, momento hipotético para obtener la desviación estándar y diámetro promedio del cristal
Q_p	Velocidad de flujo de eliminación de productos no clasificados, $1.73 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$
t	Tiempo, s
V	Volumen del cristalizador, $7.50 \times 10^{-2} \text{ m}^3$
ρ_c	Densidad del cristal, 767.35 kg/m^3
ρ_L	Densidad de la solución, 1248.93 kg/m^3

Contribuciones de los autores

MLM contribuyó con la metodología y experimentos computacionales; AFM y JCA realizaron la supervisión técnica y académica; RCP realizó validación experimental; MJGG, ONG, CNH y JCA contribuyeron con la estructuración del artículo.

Agradecimientos

El autor de correspondencia agradece a la Universidad el Papaloapan por el proyecto aprobado 01B-05-24-I “Análisis de cluster de diferentes reglas de sintonización de controladores PI con aplicaciones a biorreactores”.

Conflicto de interés

Todos los autores declaran que no tienen ningún conflicto de intereses en la publicación del artículo de investigación.

5. Referencias

- Albert, H. M., Kavitha, D., Lawanya, T., Sreedhar, V. B., Thakur, S., Bireddy, S. R., ... & Gonsago, C. A. (2024). An overview of crystallization, structural, optical, dielectric, and thermal characterization methods for amino acid chloride crystals and their technological uses. *Phase Transitions*, 97(10): 641-664. <https://doi.org/10.1080/01411594.2024.2425607>
- Afsi, N., Join, C., Bakir, T., Sakly, A. & Othman, S. (2020). An intelligent proportional controller of a seeded batch crystallizer. *2020 17th IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD)*, pp. 1009–1016. <https://ieeexplore.ieee.org/document/9364191>

- Barzegar-Jalali, M., Sheikhi-Sovari, A., Martinez, F., Seyfinejad, B., Rahimpour, E., & Jouyban, A. (2024). Solubility determination, mathematical modeling, and thermodynamic analysis of naproxen in binary solvent mixtures of (1-propanol/2-propanol) and ethylene glycol at different temperatures. *BMC chemistry*, 18(1): 178. <https://doi.org/10.1186/s13065-024-01291-3>
- Brivadis, L., & Sacchelli, L. (2021). Approximate observability and back and forth observer of a PDE model of crystallisation process. *2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Austin, TX, USA, 2021, pp. 4436-4441. <https://ieeexplore.ieee.org/document/9683245>
- Brivadis, L., Andrieu, V., Chabanon, É., Gagnière, É., Lebaz, N., & Serres, U. (2020). New dynamical observer for a batch crystallization process based on solute concentration. *Journal of Process Control*, 87: 17–26. <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2019.12.012>
- Carrillo-Ahumada, J. (2006). Diseño y simulación de estrategias para el control no lineal de la sobresaturación en la cristalización por lotes a través de perfiles dinámicos de regulación de vacío y estimación de parámetros. Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Química, Instituto Tecnológico de Orizaba, México. <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.31945.13929>
- Chiu, T., & Christofides, P. D. (1999a). Nonlinear control of particulate processes. *AIChE Journal*, 45(6): 1279–1297. <https://doi.org/10.1002/aic.690450613>
- Chiu, T., & Christofides, P. D. (1999b). Robust nonlinear control of a continuous crystallizer. *Computers & Chemical Engineering*, 23 (Supplement): S257–S260. [https://doi.org/10.1016/S0098-1354\(99\)80063-5](https://doi.org/10.1016/S0098-1354(99)80063-5)
- Damour, C., Benne, M., Boillereaux, L., Grondin-Perez, B., & Chabriat, J.-P. (2010). NMPC of an industrial crystallization process using model-based observers. *Journal of Industrial and Engineering Chemistry*, 16(5): 708–716. <https://doi.org/10.1016/j.jiec.2010.07.014>
- Damour, C., Benne, M., Grondin-Perez, B., & Chabriat, J.-P. (2010). Nonlinear predictive control based on artificial neural network model for industrial crystallization. *Journal of Food Engineering*, 99(2): 225–231. <https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2010.02.027>
- Di Ruscio, D. (2009). Linear polynomial estimator: The state observer. http://www.davidr.no/iaa2217/pensum/observer/main_observer.pdf
- El-Farra, N.H., Chiu, T.Y., & Christofides, P.D. (2004). Analysis and control of particulate processes with input constraints. *AIChE Journal*, 47(8): 1849–1865. <https://doi.org/10.1002/aic.690470815>
- Farza, M., Oueder, M., Abdenmour, R.B., & M'Saad, M. (2011). High gain observer with updated gain for a class of MIMO nonlinear systems. *International Journal of Control*, 84(2): 270–280. <https://doi.org/10.1080/00207179.2010.550014>
- Hicks T.G., & Chohey N.P. (1999). Handbook of chemical engineering, 5th ed. McGraw Hill. ISBN: 0-07-028206-4.
- Hussain, M. N., Van Meervelt, L., & Van Gerven, T. (2024). Crystallization of para-aminobenzoic acid forms from specific solvents. *CrystEngComm*, 26(11): 1647-1656. <https://doi.org/10.1039/D3CE01055D>

- Hutagaol, T. J., Liu, J., Li, M., Gao, Z., & Gong, J. (2025). Enhanced powder characteristics of succinic acid through crystallization techniques for food industry application. *Journal of Food Engineering*, 388: 112376. <https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2024.112376>
- Kalakech, C., Madmar, A., Gagnière, E., Agusti, G., Mangin, D., Lafont, S., ... & Chabanon, E. (2025). Monitoring of Paracetamol Solvent-Mediated Phase Transformation in Seeded Batch Crystallization Processes. *Crystal Growth & Design*, 25(7): 2056-2070. <https://pubs.acs.org/doi/10.1021/acs.cgd.4c01650>
- Kamatchi Kannan, V., Srimathi, R., Gomathi, V., Valarmathi, R., & PrithiEkammai, L.T. (2021). Investigation of unknown input observer for sensor fault diagnosis for a CSTR process. *Materials Today: Proceedings*, 45 (Part 2): 3431–3437. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.12.931>
- Karimidatsjerd, A., Zahedinia, S., Konar, N., Toker, O. S., & Palabiyik, I. (2025). Chapter Six - Application of crystallization in the sugar industry. In Jafari, S.M., & Malekjani, N. (Eds.) *Mass Transfer Operations in the Food Industry* (pp. 167-196). Woodhead Publishing. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-819536-9.00002-3>
- Kim, S., Lee, S. Y., Chang, J. W., & Yang, D. R. (2023). Evaluation of the kinetics of unseeded batch cooling crystallization using population balance modeling: Sucrose and KNO₃ case studies. *Journal of Industrial and Engineering Chemistry*, 118: 544-554. <https://doi.org/10.1016/j.jiec.2022.11.038>
- Kojabadi, H. M., & Chang, L. (2005). Comparative study of pole placement methods in adaptive flux observers. *Control Engineering Practice*, 13(6): 749–757. <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2004.07.005>
- Lewiner, F., Fevotte, G., Klein, J. P., & Puel, F. (2002). An online strategy to increase the average crystal size during organic batch cooling crystallization. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 41(5): 1321–1328. <https://doi.org/10.1021/ie000962e>
- Lima, F. A. R. D., de Moraes, M. G. F., Grover, M. A., Barreto Junior, A. G., Secchi, A. R., & de Souza Jr, M. B. (2024). Neural Network Inverse Model Controllers for Paracetamol Unseeded Batch Cooling Crystallization. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 63(45): 19613-19627. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.4c02060>
- Liu, T., Cui, Y., Wang, Y., & Nagy, Z.K. (2022). Seeded cooling crystallization process optimization of form L-glutamic acid based on variable moving horizon state estimation. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 61(7): 2854–2866. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.1c03973>
- Mesbah, A., Huesman, A.E., Kramer, H.J., & Van den Hof, P.M. (2011). A comparison of nonlinear observers for output feedback model-based control of seeded batch crystallization processes. *Journal of Process Control*, 21(4): 652–666. <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2010.11.013>
- Montes, F.C., Öner, M., Gernaey, K.V., & Sin, G. (2021). Model-based evaluation of a data-driven control strategy: Application to ibuprofen crystallization. *Processes*, 9(4): 653. <https://doi.org/10.3390/pr9040653>
- Morales, H., di Sciascio, F., Aguirre-Zapata, E., & Amicarelli, A. (2024). Crystallization Process in the Sugar Industry: A Discussion On Fundamentals, Industrial Practices, Modeling, Estimation

- and Control. *Food Engineering Reviews*, 16: 441-469. <https://link.springer.com/article/10.1007/s12393-024-09377-3>
- Nagy, Z.K., & Braatz, R.D. (2012). Advances and new directions in crystallization control. *Annual Review of Chemical and Biomolecular Engineering*, 3: 55–75. <https://doi.org/10.1146/annurev-chembioeng-062011-081043>
- Nagy, Z.K., Fujiwara, M., Woo, X.Y., & Braatz, R.D. (2008). Determination of the kinetic parameters for the crystallization of paracetamol from water using metastable zone width experiments. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 47(4): 1245–1252. <https://doi.org/10.1021/ie060637c>
- Piri, A., Fanaei, A. R., & Rostampour, V. (2024). Thermodynamic Analysis of a Continuous Vacuum Pan in the Crystallization Process of Sugar Beet Syrup. *Journal of Food Processing and Preservation*, 2024(1): 2245675. <https://doi.org/10.1155/2024/2245675>
- Rawlings, J.B., Miller, S.M., & Witkowski, W.R. (1993). Model identification and control of solution crystallization processes: a review. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 32(7): 1275–1296. <https://doi.org/10.1021/ie00019a002>
- Rigatos, G., Cuccurullo, G., Siano, P., Hamida, M., & Abbaszadeh, M. (2020). Nonlinear optimal control for the industrial crystallization process, *AIP Conference Proceedings*, 2293: 310004. <https://doi.org/10.1063/5.0026524>
- Sánchez-Sánchez, K. B., Bolaños-Reynoso, E., Méndez-Contreras, J. M., & Cerecero-Enriquez, R. (2020). Effects of agitation rates over metastable zone width (MSZW) of concentration for cane sugar crystallization. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 19(2): 731–744. <https://doi.org/10.24275/rmiq/Proc809>
- Sanzida, N., & Nagy, Z. K. (2013). Iterative learning control for the systematic design of supersaturation controlled batch cooling crystallisation processes. *Computers & Chemical Engineering*, 59: 111–121. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2013.05.027>
- Sun, F., Liu, T., Song, B., Cui, Y., Nagy, Z. K., & Findeisen, R. (2024). Multi-objective optimization based nonlinear model predictive control of seeded cooling crystallization process with application to β form L-glutamic acid. *Chemical Engineering Science*, 299: 120475. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2024.120475>
- Song, B., Liu, T., Zhao, M., Cui, Y., Chen, J., Nagy, Z. K., & Findeisen, R. (2025). Surrogate Modeling with Sensitivity-Based Experiment Design and Process Optimization of Seeded Cooling Crystallization: A Case Study on β -Form LGA. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 64 (18): 9272-9286. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.4c04292>
- Volpato Filho, C.J., & Vieira, R.P. (2020). Pole placement design methodology of back-EMF adaptive observer for sensorless PMSM drives. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 31: 84–93. <https://link.springer.com/article/10.1007/s40313-019-00539-x>
- Wen, X., Lin, H., Liu, G., Ning, Y., Ren, Y., Li, C., ... & Lin, J. (2025). D-tagatose biotransformation from lactose by lactase and recombinant *Bacillus subtilis* expressing L-arabinose isomerase, and the product separation, purification and crystallization. *Food Microbiology*, 131: 104785. <https://doi.org/10.1016/j.fm.2025.104785>

- Xu, H., Fu, G., Phan, D., Xiang, L., Le, T., & Zhang, L. (2024). Evaporating crystallization effect of ammonium sulfate at atmospheric pressure under the action of ultrasound. *Ultrasonics Sonochemistry*, 106: 106896. <https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2024.106896>
- Zhang, G., & Rohani, S. (2003). On-line optimal control of a seeded batch cooling crystallizer. *Chemical Engineering Science*, 58(9): 1887–1896. [https://doi.org/10.1016/S0009-2509\(03\)00021-6](https://doi.org/10.1016/S0009-2509(03)00021-6)

2025 TECNOCIENCIA CHIHUAHUA.

Esta obra está bajo la Licencia Creative Commons Atribución No Comercial 4.0 Internacional.



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>