TECNOCIENCIA CHIHUAHUA
Revista de Ciencia y Tecnología

ISSN-e: 2683-3360

Artículo de Investigación

Productividad y función de producción de ingeniería para la producción de Glucosiltransferasa por fermentación

Productivity and Engineering Production Function for Production of Glucosyltransferase by Fermentation

Marco Antonio Paredes-Lizárraga[1] *

[1] Tecnológico Nacional de México / I. T. Los Mochis. Juan de Dios Bátiz y 20 de Noviembre. Los Mochis, Sinaloa, México.

*Correspondencia: marco.pl@mochis.tecnm.mx (Marco Antonio Paredes-Lizárraga)

DOI: https://doi.org/10.54167/tecnociencia.v15i3.844

Recibido: 30 de agosto de 2021; **Aceptado**: 30 de noviembre de 2021

Publicado por la Universidad Autónoma de Chihuahua, a través de la Dirección de Investigación y Posgrado.

Resumen

Se presenta un modelo de función de producción de ingeniería para modelar la producción de glucosiltransferesa por fermentación, con el objetivo de determinar la máxima producción, máxima productividad y elasticidad unitaria. A los datos del primer DOE publicados por Kawaguti *et al.* (2005) se les aplicó el método de regresión estadística restringida (con R^2 = 0.981, P≤0.001) y optimización restringida en el software Excel® Solver®. Para fermentar, se utilizó melaza de caña (X_1 gL^{-1}), licor de maíz (X_2 gL^{-1}) y levadura (X_3 gL^{-1}) *Erwinia Sp.* en cantidades identificadas por el vector de insumos $X = (X_1, X_2, X_3)$. Para cada combinación óptima seleccionada, los pronósticos para producción de glucosiltransferasa, costo por experimento y productividad son: producción óptima en (129.39, 72.897, 16.77) con 5.78 UmL^{-1}, $0.74 y 7.75 UmL^{-1}\$$^{-1}$ respectivamente; para productividad máxima en (118.39, 42,14, 4) con 4.56, $0.31 y 14.48; para productividad óptima (elasticidad unitaria y rendimientos constantes) en (102.44, 36.48, 3.46) con 4.01, $0.27 y 14.73. Los rendimientos de escala y elasticidad inducen a explorar el vector (102.56, 36.52, 3.47) como centro del próximo diseño experimental secuencial, tal que en este diseño se logre una mejor aproximación a los rendimientos constantes y una productividad óptima global.

***Palabras clave*: función de producción, regresión restringida paso a paso, Excel® Solver®, elasticidad de la producción, productividad**

Abstract
An engineering production function model is presented to model the production of glycosyltransferase by fermentation, to determine the maximum production, maximum productivity and unit elasticity. To the data of the first DOE published by Kawaguti et al. (2005), the restricted statistical regression method (with $R^2 = 0.981$, P = 001) and restricted optimization were applied in the Excel® Solver® software. To ferment, cane molasses (X1 gL^{-1}), corn liquor (X2 gL^{-1}) and yeast (X3 gL^{-1}) Erwinia Sp. were used. In quantities identified by the input vector X = (X1, X2, X3). For each selected optimal combination, the forecasts for glucosyltransferase production, cost per experiment and productivity are: optimal production at (129.39, 72.897, 16.77) with 5.78 UmL^{-1}, \$0.74 and 7.75 $UmL^{-1}\$^{-1}$ respectively; for maximum productivity in (118.39, 42,14, 4) with 4.56, \$0.31 and 14.48; for optimal productivity (unit elasticity and constant returns) at (102.44, 36.48, 3.46) with 4.01, \$0.27 and 14.73 respectively. The returns to scale and elasticity lead us to explore the vector (102.56, 36.52, 3.47) as the center of the next sequential experimental design, such that this design achieves a better approximation to constant yields and global optimal productivity.

Keywords: **production function, stepwise restricted nonlinear regression, Excel® Solver®, production elasticity, productivity.**

1.Introducción

La importancia de la función de producción (FDP) radica en la determinación de las combinaciones óptimas de insumos que hacen más eficiente (en términos económicos, técnicos y de escala) la obtención de la producción en las empresas. En términos económicos, los economistas buscan la obtención del menor costo de producción; en términos técnicos, los ingenieros buscan la máxima producción del proceso y en términos de escala, los planificadores buscan el tamaño de empresa que logra los rendimientos constantes de escala. La primera (FDP) de uso común es la Cobb-Douglas (CD) publicada en 1928. Humphrey (1997) reporta que Lord Kelvin publicó una función de producción de ingeniería (FDPI) en 1882 e indica también que las funciones de producción algebráica son anteriores a Cobb-Douglas, ya que al menos 18 economistas de siete países en un lapso de 160 años presentaron o describieron tales funciones antes de Cobb-Douglas. Desde esta perspectiva, la función CD y sus sucesores más recientes representan la culminación de una larga tradición en lugar del comienzo de una nueva.

Chenery (1949) reporta que la FDPI describe cada entrada en términos de una o más de sus propiedades, que pueden variar independientemente dentro de cierto límite, usando relaciones de ingeniería descritas por fórmulas basadas en las leyes de la física y química, relacionadas con la naturaleza de la sustancia química o transformaciones físicas que están involucradas en el proceso productivo y que el caso más simple para la construcción de una función de producción sería una en la que la mano de obra puede tratarse como un factor conjunto con algún otro insumo, en el que la ciencia de la ingeniería está bien desarrollada y en el que las características técnicas de uno o unos pocos procesos principales son un factor determinante en la estructura de costos de la planta o empresa. Las industrias que parecen acercarse más a este ideal son las de procesos químicos, el refinamiento de materias primas y otras con técnicas estandarizadas y automatizada.

Las FDPI en el acervo científico son escasas debido a las relaciones cuantitativas de ingeniería y economía que deben involucrar para maximizar los beneficios de las empresas, analizando

simultáneamente cantidades de producción y costos de producción. En una investigación documental Wibe (1983) lleva a cabo una revisión de información publicada relacionada con funciones de producción de ingeniería donde la mayor parte de los trabajos reportan propiedades de sustitución, y en menor proporción se relacionan con propiedades de escala y otras se relacionan con progreso técnico. Reporta además que el aspecto más interesante de la FDPI es la medición ingenieril de la sustitución de insumos. Wibe (1983) descarta una larga cantidad de publicaciones relacionadas con la agricultura argumentando no creer que las elasticidades de sustitución entre vitaminas y proteínas en la crianza de pollos pueda ser de interés para los economistas.
La ONU (1978) declara que las FDPI son las más cercanas para determinar la sustitución de insumos, al ser derivadas directamente de las "leyes" que gobiernan los fenómenos físicos y naturales. Desafortunadamente las FDPI se han desarrollado solo para unos pocos procesos, el enfoque no es tan prometedor como se pensaba debido a las complicaciones matemáticas al pasar de las relaciones físicas a las relaciones económicas entre insumos y productos.

Marsden *et al*. (1974) demuestran que las funciones CD y elasticidad constante de sustitución (CES) corresponden a las propiedades físicas de reacciones químicas y biológicas generales. A partir de la estequiometria de reacciones químicas (Levenspiel, 1999; Davis & Davis, 2003; Fogler, 2016) se reporta que la tasa de cambio de una reacción química se corresponde con aproximación a la tasa de cambio (Ec. 1).

$$-r_A = kC_A^{\alpha}C_B^{\beta} \qquad \text{(Ec. 1)}$$

donde r_A es la tasa de cambio, k es constante de proporcionalidad, C_A y C_B son concentraciones de reactivos (insumos) A y B respectivamente, α y β son valores proporcionales a las cantidades de reactivos A y B respectivamente; con orden global de $n = \alpha + \beta$. La tasa se puede expresar utilizando cualquier medida equivalente de la concentración, como volumen, presión parcial o cantidad de sustancia. La función CD, por tanto, es una aproximación de FDPI para un proceso químico y biológico con función matemática monótonamente creciente. En el caso particular del proceso de fermentación, en el cual el microorganismo se estresa si tiene condiciones extremas para realizar su función biológica de conversión de reactivos en productos, la función matemática que describe al proceso es cóncava, inicia creciente y termina decreciente, evidenciando un máximo global.

Al modelo CD se le han hecho modificaciones para adaptarlo a situaciones específicas de la realidad; Lee *et al*. (2017) lo generalizan a seis variables para un proceso agrícola de producción de maíz, arroz y frijol y asumen que el modelo es una FDPI. Gechert *et al*. (2019) reportan que la elasticidad de sustitución entre capital y trabajo es un parámetro clave en economía porque mide lo fácil que es sustituir un factor de producción por otro, modificando la combinación de insumos. La elasticidad juega un papel fundamental en la teoría del crecimiento económico. A su vez, Barlow and Vodenska (2020) proponen un modelo CD dinámico de cascada para investigar el riesgo sistémico del sector industrial y estudiar el efecto de disrupción en la economía por pandemia COVID-19. Paredes-Lizárraga (2020) aplica el modelo CD a la producción de fenilalanina por fermentación utilizando regresión paso a paso con acotamiento de superficie de respuesta para mejorar R^2.

En este trabajo se presenta una FDPI que satisfaga simultáneamente las condiciones de FDP del campo de la economía y un máximo global de productividad.

Para el proceso general de fermentación, se proponen en este artículo las Ecs. (2) descritas con las formas funcionales siguientes:

$$
\begin{aligned}
& && A\Pi X_i^{ai}\left[C_0+\sum C_i \ln(d_i X_i)\right]^h && \text{(Ec. 2a)}\\
& Y(X)= && A\Pi X_i^{ai}\left[C_0+\sum C_i \ln(d_i - X_i)\right]^h && \text{(Ec. 2b)}\\
& Y(X)= && A\Pi X_i^{ai}\left[\prod \ln(d_i X_i)\right]^h && \text{(Ec. 2c)}\\
& && A\Pi X_i^{ai}\left[\prod \ln(d_i - X_i)\right]^h && \text{(Ec. 2d)}
\end{aligned}
$$

donde A es un factor de productividad total de la función CD, a_i son las elasticidades de producción de la función CD en cada variable con $0\leq a_i \leq 1$, las d_i son constantes positivas, las $(d_iX_i)>1$ y $(d_i\text{-}X_i)>1$ y las Ci son irrestrictas en signo y h=0, 1. Si h=0 las Ecs. (2) se corresponden con la función de producción de Cobb-Douglas.

En este trabajo se establece hipotéticamente que la aplicación del modelo de FDPI descrito en las Ecs. (2) permite estimar las combinaciones óptimas de insumos que maximizan la producción, la productividad, la elasticidad de la producción y la escala del experimento. Por tanto, el objetivo de este trabajo consiste en determinar:

1. La forma funcional de la Ec. (2) con la combinación de insumos que hace máxima la producción de glucosiltransferasa por fermentación, utilizando regresión paso a paso.
2. La combinación de insumos que hace máxima la productividad del proceso de glucosiltransferasa por fermentación, utilizando la FDPI estimada en el objetivo anterior.
3. El óptimo global de productividad por aplicación del análisis de rendimientos de escala y elasticidad de la producción.

2. Materiales y Métodos

Esta investigación es cuantitativa y aplicada, consistió en el remodelado de un diseño experimental (DE) para determinar la superficie de respuesta utilizando el método estadístico matemático; también es correlacional o comparativa porque se contrastó el resultado obtenido con los modelos de FDPI y de segundo orden; es explicativa porque se pronosticaron los resultados ante cambios en las cantidades de insumos, fundamentados en las tasas de cambio del modelo FDPI.

2.1 Materiales

Los datos para este trabajo se tomaron del estudio publicado por Kawaguti *et al.* (2005) quienes realizaron un diseño experimental de tres variables y superficie de respuesta en la producción de glucosiltranferasa por fermentación. En este estudio, a los datos originales se les aplicó regresión estadística restringida en el software Excel® Solver® (2016) y programación en macros Excel® para obtener el modelo de predicción de la función de producción con la forma funcional de las Ecs. (2).

2.2 Procedimientos de tratamiento de datos y ajustes de modelos

Para el ajuste de la FDPI expresada en las Ecs. (2), a los datos del estudio publicado por Kawaguti *et al.* (2005) se les aplican los métodos de regresión estadística restringida, regresión paso a paso (stepwise) y optimización restringida con Excel® Solver®, como se describe en Paredes-Lizárraga (2020).

2.2.1. Determinación y selección del mejor modelo de regresión

En la Ec. (3) se describe el modelo de programación matemática para obtener los coeficientes del modelo seleccionado. A partir de los 17 datos originales del DOE se corre el modelo y se determinan los valores de R^2 y MSE resultantes; para mejorar el modelo se elimina uno y solo uno dato del DE, acotando la superficie de respuesta, y se determinan los nuevos valores de R^2 y MSE, el proceso termina al encontrar el mejor valor de MSE. Para fines explicativos, la deducción de modelos se ejemplifica con la variante de la Ec.(2d)

$$\min \sum \mu^2 = \sum \left\{ \left[A \Pi X_i^{ai} \ln(d_i - X_i) \right] - Y \right\}^2 \qquad \text{(Ec. 3)}$$

Sujeto a $0<a_i<1$, d_i-$X_i>1$, $A > 0$

Donde μ^2 son los errores cuadráticos de la estimación, aleatorios, independientes y normalmente distribuidos, resto de variables definidas previamente en Ecs. (2).

Los modelos de optimización, al estar sujetos a restricciones, se programan en Excel® Solver® y macros Solver® para así encontrar la combinación de coeficientes a_i que minimizan los errores cuadráticos.

2.2.2. Optimización física del modelo

En la Ec. (4), conocidos los coeficientes del modelo de FDPI, se presenta el modelo de optimización restringida (aplicando Solver®) para encontrar el vector de insumos $X= (X_1, X_2, X_3)$ que permite obtener la mayor producción teórica, con el modelo

$$\max Y = \left[A \Pi X_i^{ai} \ln(d_i - X_i) \right] \qquad \text{(Ec. 4)}$$

Sujeto a $X_i \min \leq X_i \leq X_i \max$

Donde X_i min es el valor menor del insumo X_i en el DE; X_i max es el valor mayor del insumo X_i en el DE, resto de variables definidas previamente en Ecs. (2).

2.2.3 Optimización económica del modelo

En la Ec. (5), conocidos los coeficientes del modelo de FDPI, se presenta el modelo de optimización restringida (aplicando Solver®) para encontrar el vector de insumos $X=(X_1, X_2, X_3)$ que permite obtener la mayor productividad teórica, con el modelo

$$\max PT = \frac{\left[A \Pi X_i^{ai} \ln(d_i - X_i) \right]}{\sum X_i P_i} \tag{Ec. 5}$$

Sujeto a X_i min ≤ X_i ≤ X_i max

Donde PT es productividad, P_i es el precio unitario del insumo X_i, resto de variables definidas previamente en Ecs. (2).

2.2.4 Rendimientos de escala, elasticidad de la producción y productividad

Una propiedad importante de la FDP es el rendimiento de escala. El rendimiento de escala determina la proporción en que cambia la cantidad de producción cuando cambia en cierta proporción la cantidad de insumos, indicando relaciones de productividad. Los rendimientos constantes implican un costo marginal constante, mientras que los rendimientos decrecientes implican un costo marginal que aumenta con cada unidad producida. Como resultado, si los rendimientos a escala disminuyen de constante a decreciente, el costo marginal de la última unidad excedería el costo promedio de todas las unidades producidas, reduciendo el margen de beneficio y la productividad; aumentos en el costo marginal de producción obligan al establecimiento a cobrar un precio más alto. Las desviaciones de los rendimientos constantes a escala implican que el tamaño del establecimiento afecta su productividad (Ho *et al;* 2017). Una industria caracterizada por rendimientos crecientes, una empresa con una ventaja inicial puede aumentar su producción y disminuir sus costos promedio mucho más rápidamente que los competidores que recién comienzan la producción (Gilpin & Rusik, 2001). Por este motivo es importante determinar la combinación de insumos que maximiza el beneficio de la empresa, lo cual implica atender y entender las relaciones económicas de los rendimientos de escala en los procesos de producción.

La elasticidad de la producción relaciona la tasa de cambio de la producción con la tasa de cambio de los insumos, indicando relaciones de productividad. Para toda FDP la derivada es positiva y decreciente, lo cual implica que cuando X es pequeño, la tasa de cambio en Y es más grande que la tasa de cambio en X, logrando elasticidades, rendimientos crecientes y mejora de la productividad.
Teorema. Sea la función de producción $Y(X)$ transformada tal que al incrementar el vector de insumos en un escalar lambda (λ) mayor que uno se obtiene $Y(\lambda, X) = RTS(\lambda, X)\ Y(X)$ donde RTS(λ, X) es la función de rendimientos de escala. La elasticidad de la producción está directamente asociada a los rendimientos de escala tal que rendimientos crecientes están asociados a elasticidades de producción y rendimientos decrecientes están asociados con inelasticidades de producción.

$$\varepsilon_x = \frac{\frac{\Delta Y}{Y}}{\frac{\Delta X}{X}} = \frac{\frac{Y(\lambda X) - Y(X)}{Y(X)}}{\frac{\lambda X - X}{X}} = \frac{\frac{[RTS]Y(X) - Y(X)}{Y(X)}}{\frac{\lambda X - X}{X}} = \frac{RTS - 1}{\lambda - 1} \tag{Ec. 6}$$

Donde ε_x es la elasticidad de la producción por los insumos, $\Delta Y/Y$ es el cambio porcentual en la producción, $\Delta X/X$ es el cambio porcentual (en valor físico o económico) del vector de insumos.

La generalización de este teorema plantea la oportunidad de explorar la aplicación del análisis de elasticidad a otros modelos, como el de superficie de respuesta aplicada en DOEs.

3. Resultados y discusión

Para este artículo se utilizaron los datos del primer diseño experimental publicado por Kawaguti *et al.* (2005), en el cual utilizaron X_1 gL^{-1} de melaza de caña de azúcar (*Saccharum officinarum*), X_2 gL^{-1} de licor de maíz (*Zea mays*) fermentado y X_3 gL^{-1} de levadura *Erwinia Sp.* para producir glucosiltransferasa por fermentación aplicando regresión polinomial de segundo orden a un diseño factorial central compuesto de 17 corridas con tres factores (k=3; corridas: 2^k +2k+k) con correlación global (R^2=0.8) y Cuadrado Medio del Error (CME=MSE=0.51). Identificando las cantidades de insumos aplicados en cada corrida utilizando una notación vectorial para el vector de insumos X= (X_1, X_2, X_3), Kawaguti *et al.* (2005), en el tercer DOE secuencial, llegan a la combinación óptima (100, 60, 8) con la cual obtuvieron 6,65 U mL^{-1} de glucosiltransferasa, valorado con el modelo de segundo orden. A los 17 tratamientos originales del primer diseño experimental, indicados en la tabla 1, se les aplicó regresión estadística paso a paso bajo los modelos descritos en las Ecs. (2) eliminando un dato a la vez para mejorar paso a paso el estadístico R^2 y *MSE* de cada modelo.

3.1 Determinación y selección del mejor modelo de regresión

En la tabla 2 se reportan los resultados de las regresiones estadísticas de las cuatro variantes de modelo. Cada regresión inicia con los 17 datos de la tabla 1 y termina cuando se alcanza el menor cuadrado del error (CME ó MSE). El modelo de la Ec. (2a) es óptimo con 11 de los 17 datos de la tabla 1; el modelo de la Ec. (2b) es óptimo con 12 de los 17 datos de la tabla 1; el modelo de la Ec. (2c) es óptimo con 9 de los 17 datos de la tabla 1 y el modelo de la Ec. (2d) es óptimo con 8 de los 17 datos de la tabla 1.

Comparando los resultados de la tabla 2 se puede observar que las cuatro variantes de FDPI propuestas tienen mejores indicadores de R^2 y MSE que el modelo polinomial de segundo orden utilizado por Kawaguti *et al*. (2005).

De las cuatro variantes de FDPI, el mejor modelo de regresión es el descrito en la Ec. (2d) e indicado en la tabla 2 con MSE = 0.046, con el cual se trabajó el proceso de optimización y todos los apartados siguientes. Este mejor modelo se corresponde con la Ec. (3).

Los datos seleccionados para la regresión y los resultados de pronóstico con el modelo de la Ec. (2d) se muestran en la Tabla 3. En la columna 6 se indican los valores pronosticados de glucosltransferasa. El modelo correlaciona con R^2 =0.981 y valor P≤0.001. Los coeficientes se indican en la tabla 4.

Tabla 1. Matriz experimental del primer diseño central compuesto utilizado por Kawaguti *et al*.
Table 1. Experimental matrix of the First composite central design data used by Kawaguti *et al.*

No. Exp.	Melaza (gL^{-1}) (X_1)	Licor (gL^{-1}) (X_2)	Levadura (gL^{-1}) (X_3)	Glucosil Transferasa ($U\ mL^{-1}$)
1	70.24	42.14	7.23	3.5
2	129.76	42.14	7.23	4.46
3	70.24	77.86	7.23	3.67
4	129.76	77.86	7.23	5.28
5	70.24	42.14	16.77	3.49
6	129.76	42.14	16.77	5.32
7	70.24	77.86	16.77	3.78
8	129.76	77.86	16.77	0.53
9	50	60	12	3.27
10	150	60	12	1.43
11	100	30	12	4.92
12	100	90	12	3.19
13	100	60	4	5.73
14	100	60	20	5.731
15	100	60	12	4.97
16	100	60	12	5.1
17	100	60	12	5.4

Referencia: (Kawaguti *et al*.,2005) con permiso del Autor.
Source: (Kawaguti *et al*.,2005) with Author permission

Tabla 2. Modelos bajo estudio y comparación por MSE
Table 2. Models under study and MSE comparison

Modelo (Ec)	R^2	N	SST	SSE	GL	MSE
$A\ \Pi X_i\hat{}a_i\ [C_o+\sum C_i\ ln(d_iX_i)]$	0.978	11	7.915	0.169	2	0.085
$A\ \Pi X_i\hat{}a_i\ [C_o+\sum C_i\ ln(d_i-X_i)]$	0.935	12	10.31	0.663	3	0.221
$A\ \Pi X_i\hat{}a_i\ [\Pi\ ln(d_iX_i)]$	0.927	9	6.396	0.463	3	0.154
$A\ \Pi X_i\hat{}a_i\ [\Pi\ ln(d_i-X_i)]$	0.981	8	4.99	0.092	2	0.046

Comparación de modelos. El modelo polinomial de segundo orden para tres factores requiere de 9 estimadores estadísticos para variables más el término constante y requiere de al menos 10 datos independientes para el proceso de regresión, mientras que el modelo de FPDI de la Ec. (2d) requiere de 6 estimadores estadísticos para variables más el término constante y requiere de al menos 7 datos independientes por lo cual ofrece la ventaja de elegir en la regresión a los datos con menores

Tabla 3. Datos seleccionados para la regresión y pronóstico estimado. Y*
Table 3. Selected data for regression and estimated forecast. Y*

No. Exper.	Melaza (gL^{-1}) (X_1)	Licor (gL^{-1}) (X_2)	Levadura (gL^{-1}) (X_3)	Glucosil Transferasa ($U\ mL^{-1}$)	Valor Estimado (Y*)($U\ mL^{-1}$)
1	70.24	42.14	7.23	3.5	3.354
3	70.24	77.86	7.23	3.67	3.673
4	129.76	77.86	7.23	5.28	5.369
5	70.24	42.14	16.77	3.49	3.6
6	129.76	42.14	16.77	5.32	5.263
7	70.24	77.86	16.77	3.78	3.942
15	100	60	12	4.97	4.952
16	100	60	12	5.1	4.952

Referencia: Cálculos del Autor. R^2=0.981 con valor $p \leq 0.001$
Source: Author´s calculations. R^2=0.981 with p value≤ 0.001

valores de cuadrados medios del error (acotando la superficie de respuesta del DE) para mejorar la correlación global del modelo (R^2). En términos estadísticos, el modelo FDPI aquí expuesto es mejor que el modelo polinomial porque tiene mejor valor de R^2 (0.981 contra 0.8) y mejor valor de MSE (0.046 contra 0.51).

3.2 Optimización física del modelo

Una vez conocidos los parámetros de la FDPI, se procede a optimizar los resultados del proceso de producción de glucosltransferasa, aplicando el modelo de la Ec. (4) y respetando el rango de variación permitido a cada variable independiente X_i, como se indican en los renglones 2 y 3 de la tabla 5, a fin de no extrapolar resultados y mantener el proceso dentro de las fronteras del experimento. En la tabla 5 se muestran los resultados comparativos de los procesos de optimización física y económica, obtenidos por Solver©.

Tabla 4. Coeficientes de regresión ajustados para el modelo de la Ec. (2d).
Table 4. Adjusted regression´s coefficients for Ec. (2d) model.

Coeficiente	Valor ajustado	Coeficiente	Valor ajustado
A	0.00008		
a_1	0.999	d_1	167.2679
a_2	0.38879	d_2	121.2
a_3	0.09197	d_3	268.62262

Solver realiza búsquedas metódicas de valores ideales para cada X_i tal que se obtiene el mayor valor de la variable dependiente. En la tabla 5 se reportan los resultados del proceso de optimización restringida de la producción, y la productividad asociada a cada vector de insumos.

Para obtener la productividad asociada a cada vector de insumos, en la tabla 5 se indican los precios en dólares para cada insumo, consultados con proveedores especializados: \$1 Kg^{-1} para melaza (consultado en alibaba.com), \$2 Kg^{-1} para licor (consultado en quiminet.com) y \$28 kg^{-1} para levadura (consultado en mercadlibre.com). Con estos precios y las cantidades de cada X_i se calcula el costo total de operación de cada experimento, indicado en la columna 6 de la tabla 5, y se calcula la productividad reportada en la columna 7 de la tabla 5. En la columna 8 se reporta el costo unitario por experimento estimado por U mL^{-1} de glucosiltransferasa.

En el renglón 4 se indican los valores óptimos reportados por Kawaguti *et al.* (2005) en su publicación original (100. 60, 8) con la cual reporta que (en el tercer DOE secuencial) obtuvieron 6.65 U mL^{-1} de glucosiltransferasa con el modelo de segundo orden pero que medido con el modelo de FDPI se pronosticaron 4.35 U mL^{-1} de producto, con un costo de \$0.444 por corrida, productividad de 9.8 y costo unitario por experimento de 0.10 \$$mLU^{-1}$.
En el renglón 5 se describe la cantidad de insumos a aplicar para obtener la máxima producción física, respetando el modelo de la Ec. (4), tal que con el vector de insumos (129.39, 72.897, 16.77) se pronostican 5.78 U mL^{-1} de glucosiltransferasa a un costo de \$0.74 por corrida, lo cual nos da una productividad de 7.76 U exper $\$^{-1}mL^{-1}$ y un costo unitario por experimento de 0.12 \$$mLU^{-1}$ de glucosiltransferasa.

Una empresa con enfoque de producción operaría con el vector de insumos (129.39, 72.897, 16.77) para producir 5.78 U mL^{-1} de glucosltransferasa y obtener una productividad de 7.76 U exper $\$^{-1}mL^{-1}$ a pesar de incurrir en mayor costo unitario por experimento de producción (0.12 \$$mLU^{-1}$) de glucosiltransferasa. Con la descripción del máximo físico se cumple con el objetivo 1 planteado.

3.3 Optimización económica del modelo

En el renglón 6 se describe la cantidad de insumos a aplicar para obtener la máxima productividad, respetando el modelo de la Ec. (5), tal que con el vector de insumos (118.39, 42,14, 4) con el cual se pronostica una producción de 4.56 U mL^{-1} de glucosiltransferasa a un costo de \$0.31 por corrida lo cual nos da una productividad de 14.49 U exper $\$^{-1}mL^{-1}$ y un costo unitario por experimento de 0.06 \$$mLU^{-1}$ de glucosiltransferasa.
Una empresa con enfoque de productividad operaría en el vector de insumos (118.32, 42,14, 4) para producir 4.56 U mL^{-1} de glucosltransferasa y obtener una productividad de 14.49 U exper $\$^{-1}mL^{-1}$ y costo unitario por experimento de 0.06 \$$mLU^{-1}$. En condiciones de igualdad, una empresa con información analítica del óptimo físico y óptimo económico preferirá operar en el óptimo económico para maximizar sus beneficios, al disminuir su costo de producción (Gilpin & Rusik, 2001; Ho *et al.* 2017).

3.4 Rendimientos de escala, elasticidad de la producción y productividad

Dada la función definida por las Ecs. (2), los resultados de multiplicar cada modelo por el escalar λ se reportan en la tabla 6, evidenciando que los rendimientos de la FDPI dependen de los valores de los insumos, a diferencia de la función de producción de Cobb-Douglas (CD) en la cual los rendimientos de la función no dependen del valor de los insumos. Los rendimientos de la FDPI permiten optimizar la escala del experimento o tamaño de la empresa, permitiendo transitar de rendimientos decrecientes a crecientes y viceversa, como lo describen Ho *et al.* (2017).

Tabla 5. Tabla comparativa de resultados de optimización física y económica.
Table 5. Comparative table of economics and physical optimization results.

Indicadores De optimización	**Melaza (gL^{-1}) (X_1)**	**Licor (gL^{-1}) (X_2)**	**Levadura (gL^{-1}) (X_3)**	**Valor Estimado (Y*)(U mL^{-1})**	**Costo C (USD Exp^{-1})**	**PT= Y*/C**	**Costo Unitario (C/Y*)**
US/unit	0.001	0.002	0.028				
Xi min	70.24	42.14	7.23				
Xi max	129.76	77.86	16.77				
Óptimo	100	60	8	4.348	0.444	9.7941	0.1
Max Q	129.76	72.8699	16.77	5.779	0.745	7.7566	0.12
Max PT	118.317721	42.14	4	4.557	0.314	14.4866	0.06

En general, el operador λ transforma la función original tal que $Y(\lambda, X) = RTS(\lambda, X)\ Y(X)$ donde RTS(λ, X) es la función de rendimientos de escala, que se reportan en la columna 2 de la tabla 6.
Para estimar los rendimientos de la FDPI de la Ec. (2) es más práctico utilizar la equivalencia de rendimientos de la Ec. (6) que las deducciones particulares de RTS (λ, X) indicadas en la columna 2 de la tabla 6. En la tabla 7 se reportan las estimaciones de elasticidades a diferentes intensidades de uso de los insumos.

Tabla 6. La FDPI y cálculo de rendimientos RTS (λ , X)
Table 6. FDPI and returns calculus RTS (λ , X)

Y(X)	**RTS (λ, X)**
$A\Pi X_i^{a_i}\left[C_0 + \sum C_i \ln(d_i X_i)\right]$	$\lambda^{\Sigma a_i}\left[1 + \frac{\ln \lambda \Sigma C_i}{C_0 + \sum C_i \ln(d_i X_i)}\right]$
$A\Pi X_i^{a_i}\left[C_0 + \sum C_i \ln(d_i - X_i)\right]$	$\left[\frac{\lambda^{\Sigma a_i}\left[C_0 + \Sigma C_i \ln(d_i - \lambda X_i)\right]}{C_0 + \sum C_i \ln(d_i - X_i)}\right]$
$A\prod X_i^{a_i}\left[\prod \ln(d_i X_i)\right]$	$\left[\frac{\lambda^{\Sigma a_i}\prod \ln(\lambda d_i X_i)}{\prod \ln(d_i X_i)}\right]$
$A\Pi X_i^{a_i}\left[\Pi\left(d_i - X_i\right)\right]$	$\left[\frac{\lambda^{\Sigma a_i}\prod \ln(d_i - \lambda X_i)}{\prod \ln(d_i - X_i)}\right]$

A partir de la máxima productividad del modelo, indicada en la tabla 5 con los valores del vector óptimo de insumos (118.32, 42.14, 4) con los cuales se obtiene la producción de 4.56 U mL^{-1} de glucosiltransferasa con un costo total de insumos de 31 centavos y una productividad de 14.48 U exper $^{-1}$mL^{-1} (λ=1); Si aumentamos en 0.1% los insumos (λ=1.001), la producción aumenta marginalmente y la productividad baja marginalmente. Cambiar la operación del proceso de λ=1 a λ=1.001 baja la productividad, disminuye los rendimientos y genera inelasticidad en la producción, como se evidencia en los renglones 1 y 2 de la tabla 7.

Si utilizamos un valor λ=0.8658 los valores del vector de insumos son (102.44, 36.48, 3.46) con los cuales se obtiene la producción de 4.01 U mL^{-1} de glucosiltransferasa con un costo total de insumos de 27 centavos y una productividad de 14.73 U exper $^{-1}$mL^{-1} y costo unitario de 0.065 $mLU^{-1} de glucosiltransferasa; si aumentamos marginalmente los insumos, aplicando λ=0.8668, la tasa de cambio de la producción es igual a la tasa de cambio de los insumos (0.0011) como se indica en las columnas 8 y 9 de la tabla 7, la productividad se mantiene constante y la elasticidad es unitaria, evidenciando rendimientos constantes de escala, como se evidencia en los renglones 3 y 4 de la tabla 7. De esta manera, la elasticidad de la producción nos permite llegar al óptimo global de productividad; cumpliendo así el objetivo 3 planteado.

Por otra parte, si utilizamos un valor λ=0.8558 y aumentamos el vector en λ=0.8568, la tasa de cambio de la producción es mayor a la tasa de cambio de los insumos, la producción es elástica, evidenciando rendimientos crecientes de escala. Aumentos en el vector de insumos generan aumentos en la productividad, como se evidencia en los renglones 5 y 6 de la tabla 7.

Tabla 7. Relaciones de λ con los rendimientos, productividad y elasticidad.
Table 7. λ relations with returns to scale, productivity and elasticity.

Lambda (λ)	Melaza (gL^{-1}) (X_1)	Licor (gL^{-1}) (X_2)	Levadura (gL^{-1}) (X_3)	Valor Estimado (Y*)(U mL^{-1})	Costo (USD Exper^{-1})	PT= Y*/C	Cambio %ΔY*	Cambio %ΔC	elasticidad
1	118.317	42.14	4	4.55747	0.3146	14.487			
1.001	118.436	42.182	4.004	4.5608	0.3149	14.483	0.00073	0.00101	0.7306
0.8658	102.44	36.485	3.4632	4.0127	0.2724	14.732			
0.8668	102.558	36.527	3.4672	4.0173	0.2727	14.732	0.00115	0.00115	1
0.8558	101.256	36.063	3.4232	3.9663	0.2692	14.731			
0.8568	101.374	36.106	3.4272	3.9707	0.2695	14.731	0.00118	0.00116	1.0172

En general, se corresponden las relaciones siguientes: a producción con elasticidad unitaria le corresponden rendimientos constantes y máxima productividad global; a producción inelástica le corresponde rendimientos decrecientes y productividad subóptima; a producción elástica le corresponde rendimientos crecientes y productividad subóptima. La teoría económica sostiene que a medida que la escala física de producción aumenta, el proceso de producción exhibirá primero rendimientos crecientes a escala, seguida de rendimientos constantes a escala, y finalmente rendimientos decrecientes a escala (Dollery *et al;* 2007).

Thayaparan & Neruja (2021) también confirman las relaciones de eficiencia y rendimientos al analizar la eficiencia de120 predios agrícolas donde encontraron que 112 de ellos estaban operando con rendimientos crecientes a escala, lo que significa que la mayoría de los cultivadores de arroz estaban operando en una región preóptima de la frontera de producción. Solo uno de los agricultores produjo arroz con rendimientos decrecientes a escala, lo que indica que operó en una región postóptima de la frontera de producción. Los restantes 7 agricultores operaron con rendimientos constantes, encontrándose en la región óptima de la frontera de producción.

Los resultados de elasticidad, rendimientos y eficiencia obtenidos son concordantes con otros estudios realizados por Gülbiten y Taymaz (2000) quienes analizan la industria de manufactura de diversos países, comparada con la industria turca y encuentran que los rendimientos a escala no son un factor importante para explicar el diferencial de productividad entre establecimientos pequeños y grandes, pero que el tamaño de la planta es uno de los principales determinantes de la eficiencia.

La tabla 7 evidencia el tamaño de la planta con el tamaño del vector, determinado por λ. Shehu y Mshelia (2007), quienes analizaron la eficiencia técnica de 180 pequeñas granjas y encontraron que el 95% de los granjeros operaron en la etapa I de producción con retornos de escala de 1.06. Esto indica que los granjeros fueron ineficientes en la asignación y uso de los insumos productivos. Los granjeros podrían mejorar la productividad aumentando la cantidad de insumos.
En consecuencia, se deduce que para alcanzar la máxima eficiencia y productividad del proceso conviene explorar la operación en el vector de insumos (102.56, 36.52, 3.47) como centro del próximo diseño experimental secuencial, tal que en este diseño experimental se logre una mejor aproximación a los rendimientos constantes.

4. Conclusiones

Con el modelo FDPI propuesto en este trabajo se estimaron las combinaciones óptimas de insumos que maximizan la producción, la productividad, la elasticidad de la producción y la escala del experimento, cumpliendo los objetivos planteados. A los datos del primer DOE publicados por Kawaguti se les aplicó regresión estadística restringida y optimización restringida en el software Excel con los resultados que se describen. La producción óptima se localiza en el vector de insumos (129.39, 72.897, 16.77) con el cual se pronostican 5.78 U mL^{-1} de glucosiltransferasa a un costo de $0.74 por corrida, lo cual nos da una productividad de 7.76 U exper $^{-1}$mL^{-1}. La productividad máxima se localiza en el vector de insumos (118.39, 42.14, 4) con el cual se pronostica una producción de 4.56 U mL^{-1} de glucosiltransferasa a un costo de $0.31 por corrida lo cual nos da una productividad de 14.49 U exper $^{-1}$mL^{-1}. La escala óptima del experimento, en la cual la elasticidad es unitaria y los rendimientos son constantes, se localiza en el vector de insumos (102.44, 36.48, 3.46) con el cual se pronostica una producción de 4.01 U mL^{-1} de glucosiltransferasa con un costo total de insumos de 27 centavos por experimento, lo cual nos da una productividad de 14.73 U exper $^{-1}$mL^{-1}. La función de producción tiene rendimientos decrecientes si el vector de insumos es proporcionalmente mayor que el vector (102.5, 36.5, 3.47), y rendimientos crecientes si el vector de insumos es proporcionalmente menor. Así, la intensidad de uso de los insumos permite transitar de rendimientos crecientes a rendimientos decrecientes y viceversa. Una empresa con enfoque de producción operaría con el vector de insumos (129.39, 72.897, 16.77) para producir 5.78 U mL^{-1} de glucosltransferasa y obtener una productividad de 7.76 a pesar de incurrir en mayor costo unitario de producción (0.12 $mLU^{-1}); mientras que una empresa con enfoque de productividad operaría en el vector (118.39, 42,14, 4) para producir 4.56 U mL^{-1} de glucosltransferasa y obtener una productividad de 14.49 U exper $^{-1}$mL^{-1} y costo unitario de 0.06 $mLU^{-1}. El análisis de los rendimientos y elasticidad de la producción refieren que para alcanzar la máxima eficiencia y productividad del proceso conviene explorar la operación en el vector de coordenadas (102.56, 36.52, 3.47) como centro del próximo diseño experimental secuencial, tal que en este diseño se logre una mejor aproximación a los rendimientos constantes y una productividad óptima global de 14.732

La generalización del teorema de elasticidad plantea la oportunidad de explorar la aplicación del análisis de elasticidad a otros modelos, como el de superficie de respuesta aplicada en DOEs.

Conflicto de interés

El autor declara que no tienen conflictos de interés con respecto al trabajo presentado en este reporte.

Nomenclatura

%ΔC	Cambio porcentual en costo
%ΔY	Cambio porcentual en la variable dependiente
ΔX	Incremento en la variable independiente (insumo)
ΔY	Incremento en variable dependiente, producción)
CD	Función de Producción de Cobb-Douglas
CES	Función de Producción Constant Elasticity of Substitution
CME=MSE	Cuadrado Medio del Error, Mean Square Error
DE	Diseño Experimental
DOE	Diseño de Experimentos, Design of Experiments
FDP	Función de Producción
FDPI	Función de Producción de Ingeniería
ONU	Organización de las Naciones Unidas
RTS(λX)	Función de Rendimientos de Escala, Returns To Scale
λ	Multiplicador escalar
R^2	Coeficiente de correlación global
X_i	Cantidad de insumo i utilizado en el DOE

5. Referencias

Barlow, J., and Vodenska, I. (2020). Socio-Economic Impact of COVID-19 Pandemic. http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3720785

Chenery, H. B. (1949). Engineering Production Function. The Quarterly Journal of Economics 63, 507-531. https://doi.org/10.2307/1882136

Davis, M., & Davis, R. (2003). Fundamentals of Chemical Reaction Engineering. Mc. Graw Hill. https://resolver.caltech.edu/CaltechBOOK:2003.001

Dollery, B., Byrnes, J. y Crase, L. (2007). Economies of Scale and Population Size in Australian Local Government Structural Reform Programs. Working Papers Series. https://bit.ly/3MI2nDk

Fogler, S. (2016). Elements of Chemical Reaction Engineering. Prentice Hall.

Gechert, S., Havranek, T., Irsova, Z., & Kolcunova, D. (2019). Douglas production Function? A Quantitative Survey of the Capital-Labor Substitution Elasticity. Leibniz Information Centre for Economics. https://bit.ly/3KGB2QL

Gilpin, R., & Rusik, D. (2001). Global Political Economy Understanding the International Economic Order. Princeton University Press.

Gülbiten, Ö; Taymaz, E. (2000) Are Small Firms Inefficient? a Schumpeterian Analysis of Productivity Differentials. 9th Annual Conference of Economic Research Forum (ERF). https://bit.ly/3F9XrES

Ho, S. J., & Dimitrije R. (2017). Returns to Scale, Productivity Measurement, and Trends in U.S. Manufacturing Misallocation. Workink Papers. https://bit.ly/3iRBxvv

Humphrey, T. M. (1997). Algebraic Production Functions and Their Uses Before Cobb-Douglas. Economic Quarterly Volume 83/1. https://bit.ly/3LHErjs

Kawaguti, H. Y., Manrich, E., Fleuri, L., & Sato, H. (2005). Production of Glucosyltransferase by Erwinia Sp. Using Experimental. Brazilian Journal of Microbiology, 227-234. https://doi.org/10.1590/S1517-83822005000300005

Lee, Y., Kim, T. (2017). The Effects of Agricultural Extension Service on Farm Productivity: Evidence from Mbale District in Uganda. Preprints.org; 2017. http://dx.doi.org/10.20944/preprints 201704.0162.v1.

Levenspiel, O. (1999). Elements of Chemical Reactions Engineering. Prentice Hall.

Marsden, J., Pingry, D., & Whinston, A. (1974). Engineering Foundations of Production Functions. Journal of Economic Theory, 124-140. https://bit.ly/3w0wqj0

ONU. (1978). Industry and Development No. 2. New York.

Paredes-Lizárraga, M. A. (2020). Modelación de la fermentación para la producción de fenilalanina. *TECNOCIENCIA Chihuahua*, *14*(2), 48-65. https://doi.org/10.54167/tecnociencia.v14i2.511

Shehu, J.F. and Mshelia, S.I., (2007). Productivity and technical efficiency of small-scale rice farmers in Adamawa State, Nigeria. Journal of Agriculture & Social Sciences 3(4), 117-120. https://bit.ly/3LJcXtR

Thayaparan, A. & Neruja, N. (2021) Factors Influencing Technical Efficiency of Paddy Farms in Mullaitivu District: Non – Parametric Approach. Wayamba Journal of Management. Vol. 12. http://doi.org/10.4038/wjm.v12i1.7528

Wibe, S. (1983). Engineering Production Functions: A Survey. Economica, New Series, 51(204), pp. 401-411. https://bit.ly/3vFdDeb

2021 TECNOCIENCIA CHIHUAHUA.

Esta obra está bajo la Licencia Creative Commons Atribución No Comercial 4.0 Internacional.

https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/