



**FINGUACH**

**Año 3 · Número 5 · Julio - Diciembre 2022**

Universidad Autónoma de Chihuahua  
Facultad de Ingeniería

**E-ISSN: 2683-3387**

<https://vocero.uach.mx/index.php/finguach>



**UACH**  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
**CHIHUAHUA**

M.D. Luis Alfonso Rivera Campos  
**Rector**

Dr. Luis Carlos Hinojos gallardo  
**Director de Investigación y Posgrado**

Dra. Ruth del Carmen Grajeda González  
**Directora de Extensión y Difusión Cultural**

M.I Fabián Vinicio Hernández Martínez  
**Director Facultad de Ingeniería**



La revista FINGUACH, año 3, No. 5, Julio-Diciembre 2022, es una publicación semestral editada por la Universidad Autónoma de Chihuahua, calle Escorza 900, Col. Centro, Chihuahua, Chih., C.P. 31000, Tel. (614) 442-9500 ext 2545, <https://vocero.uach.mx/index.php/finguach>. Editor responsable: Fabián Vinicio Hernández Martínez. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2020-042310492700-203, E-ISSN: 2683-3387, otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Responsable de la última actualización de este Número, Fabián Vinicio Hernández Martínez, Editor, Circuito No. 1, Campus Universitario II, Chihuahua, Chih., C.P. 31125, el día 11 de noviembre de 2022. Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación. Queda prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma de Chihuahua.



**latindex**

# Contenido

Carta del Editor	2
El Teorema de Ornstein	3
Delimitación de Áreas Prioritarias de Recarga para el Acuífero Meoqui – Delicias	31
Algoritmos de Inteligencia Artificial Aplicados a Predicciones Deportivas	42

## Comité Editorial

**M.I. Fabián Vinicio Hernández Martínez**  
Editor en jefe

**Dr. Luis Carlos González Gurrola**  
Coordinador del Comité Editorial

**Dr. José Luis Herrera Aguilar**  
Editor

**Dr. Jesús Roberto López Santillán**  
Editor

**Dr. Alejandro Villalobos Aragón**  
Editor

**Dr. Hermes Moreno Álvarez**  
Editor

**Dr. Roberto Narro García**  
Editor

**M.I. Miguel Ángel Méndez Alvarado**  
Editor

**M.V. Aldo Antonio Cisneros Rodríguez**  
Editor

**M.A. Luis Carlos González Martínez**  
Editor

**Ing. Luis Rafael Valdez Santiesteban**  
Diseñador





## Carta del editor

**B**ienvenidos a un nuevo número de la revista FINGUACH. Mi nombre es Luis Carlos González Gurrola y soy el nuevo Coordinador del Comité Editorial FINGUACH. Nuestro objetivo es otorgar un espacio a temas de las áreas que se cultivan en nuestra Facultad desde un punto de vista de divulgación o incluso más técnico. Así que todos los lectores, tanto de nuestra Facultad como de otras instituciones, interesados en participar por medio de un artículo son bienvenidos.

En este número presentaremos 3 artículos que caen en las áreas de Matemáticas, Hidrología y Ciencias de la Computación. El primero de esto busca un acercamiento al teorema de Ornstein, teorema que establece la relación entre sistemas que se creían que no estaban relacionados originalmente. Este tipo de artículos son interesantes, ya que nos acercan a temas que tradicionalmente sentimos lejanos, pero con un buen tratamiento de los autores nos abren nuevas perspectivas que invitan a la reflexión.

El segundo artículo presenta un estudio sobre la delimitación de áreas prioritarias para la recarga del acuífero Meoqui-Delicias. Tema por demás interesante ya que motiva la discusión sobre la importancia de tener un sistema dinámico y sustentable para uno de los repositorios de agua más importante en la zona central del estado de Chihuahua.

Finalmente, con la fiebre de la siguiente Copa del Mundo de Catar 2022, no podíamos prescindir de un tema de deportes, pero analizado desde el punto de vista de técnicas de Ciencias de la Computación, conocidas como de Inteligencia Artificial. Particularmente en este artículo los autores proponen un esquema algorítmico para analizar datos deportivos y generar probabilidades del equipo o participante que será el triunfador.

Como pueden observar, tenemos artículos de temas de varias áreas del conocimiento, interesantes y que nos invitarán seguramente a la reflexión. No se diga más, los dejo entonces con este número de nuestra revista.

**Dr. Luis Carlos González Gurrola**  
*Coordinador del Comité Editorial FINGUACH.*



## El Teorema de Ornstein

José L. Herrera-Aguilar<sup>1,2</sup> Jesús Ramón Carmona Jáquez<sup>3,4</sup> Cornelio Alvarez Herrera<sup>1</sup>  
Octavio Raúl Hinojosa de la Garza<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chihuahua, Circuito Universitario s/n, Chihuahua, México. (e-mail: jlhererra@uach.mx). <sup>2</sup>Departamento de Ciencias Básicas, Instituto Tecnológico de Chihuahua, Av. Tecnológico # 2909, Chihuahua, México. (e-mail: jose.ha@chihuahua.tecnm.mx). <sup>3</sup>Estudiante de la Maestría en Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chihuahua, Circuito Universitario s/n, Chihuahua, México. <sup>4</sup>Nueva adscripción, <sup>5</sup>Primer envío agosto de 2022.

### Resumen

En el presente trabajo se proporciona una revisión al teorema de Ornstein, presentándolo de una manera amigable al lector dando una serie de perspectivas interesantes que impulsen el interés sobre temas como el teorema de isomorfismo de dos Shift's de Bernoulli. Esta introducción se lleva a cabo utilizando como base los conceptos básicos de teoría de la medida y teoría ergódica. Puede ser utilizado como apoyo en cursos avanzados de análisis, además permite que cualquier lector interesado tenga una introducción sencilla y formal al tema.

### Abstract

The present work brings up a review of the Ornstein's theorem, presenting it in a friendly way to the reader giving a series of interesting perspectives to impulse the interest in topics like the Bernoulli's isomorphism of two Shift's theorem, this introduction is made using as a base the basic concepts of measure theory and ergodic theory. This can be used as an aid in advanced courses of analysis, also brings to almost any reader an easy and formal introduction to the topic.

**Keywords**— *Shifts de Bernoulli, Teoría de la Medida, Teoría Ergódica, Sistemas Dinámicos*

## 1. Espacios de medida

El estudio de la teoría ergódica se fundamenta en la teoría de la medida, por lo cual comenzaremos por dar algunas definiciones básicas de teoría de la medida [1, 2]. La teoría de la medida tiene sus orígenes en la integral de Lebesgue en el año 1904; Henri Léon Lebesgue fue un matemático de origen francés nacido en 1875 y miembro de la *London Mathematical Society* y de la Academia de Ciencias de París, realizó sus estudios en la *Ecole Normale Supérieure* [3]. Posteriormente construiremos un espacio de probabilidad, el cual se encuentra relacionado con la dinámica simbólica y con el conjunto de Cantor. El espacio generado nos dará la pauta para implementar de una clase especial de funciones dentro de ese espacio. Empezaremos por definir el concepto de una  $\sigma$ -álgebra.

**Definición 1.1.** Una colección  $\beta$  de subconjuntos de un conjunto  $X$ , es una  $\sigma$ -álgebra si cumple las siguientes propiedades:

1.  $X \in \beta$ . sólo
2. Si  $B \in \beta$ . Entonces  $X \setminus B \in \beta$ .
3. Sea  $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ , si  $B_n \in \beta \forall n = 1, 2, 3, \dots$ . Entonces  $B \in \beta$ .

Dado un conjunto  $X$  y dada una  $\sigma$ -álgebra  $\beta$  de  $X$ , vamos a denotar por *espacio de medida* a  $(X, \beta, m)$ , donde  $m$  es una función que a cada elemento de la  $\sigma$ -álgebra le asigna un número positivo, es decir  $m : \beta \rightarrow \mathbb{R}^+$ . La función  $m$  debe satisfacer las siguientes condiciones:

1.  $m(\emptyset) = 0$ .
2.  $m(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n)$ , siempre que  $\{B_n\}$  sea una colección de elementos en  $\beta$  que sean elementos disjuntos dos a dos de  $X$ .

Los elementos de  $\beta$  son llamados conjuntos medibles en  $X$ , notemos que solo estamos permitiendo que  $m$  asigne valores positivos y finitos, por lo cual se dice que  $m$  es una *medida finita*. Si  $m(X) = 1$ , denominaremos al espacio de medida  $(X, \beta, m)$  como *espacio de probabilidad*, en este caso se dice que  $m$  es una medida de probabilidad.

Los espacios de medida normalmente se construyen a partir de una colección  $\rho$  de subconjuntos de un conjunto  $X$ , posteriormente se considera la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que contenga a  $\rho$ <sup>1</sup>, este proceso permite

---

<sup>1</sup>Esta  $\sigma$ -álgebra es conocida como la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\rho$ .

conocer los conjuntos medibles y las respectivas medidas. Como ejemplo, a continuación construiremos un espacio de probabilidad que proviene de un producto de espacios de probabilidad [2].

Sean  $(X_i, \beta_i, m_i)$  con  $i \in \mathbb{Z}$  espacios de probabilidad. Definimos  $X = \prod_{i=-\infty}^{\infty} X_i$ , un punto  $\{x\}$ , en el espacio  $X$  es una secuencia infinita de elementos de la forma  $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ , donde cada uno de los  $x_i \in X_i$  para cada  $i \in \mathbb{Z}$ . La  $\sigma$ -álgebra  $\beta$  de los subconjuntos de  $X$  es llamada  $\sigma$ -álgebra producto. Sea  $n \geq 0$ ,  $A_j \in \beta_j$  para  $|j| \leq n$ , consideremos el siguiente conjunto:

$$\prod_{i=-\infty}^{-(n+1)} X_i \times \prod_{j=-n}^n A_j \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i = \{(x_i)_{-\infty}^{\infty} \in X | x_j \in A_j \text{ para } |j| \leq n\}. \quad (1)$$

A estos conjuntos los llamaremos *rectángulos medibles*, el conjunto de todos los rectángulos medibles lo denotaremos por  $\rho$ . La  $\sigma$ -álgebra producto es la generada por el conjunto  $\rho$ . La medida <sup>2</sup> de un conjunto contenido en  $\rho$  es el valor  $m(A) = \prod_{j=-n}^n m_j(A_j)$ .

Un caso especial es cuando los espacios de probabilidad  $(X_i, \beta_i, m_i)$  son todos iguales, por ejemplo, si tenemos  $(X_i, \beta_i, m_i)$  con  $i \in \mathbb{Z}$  espacios de probabilidad en donde cada uno de los  $(X_i, \beta_i, m_i)$  es el espacio de probabilidad  $(Y, \zeta, \mu)$ . En donde el conjunto  $Y$  está dado por  $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ . La  $\sigma$ -álgebra será el conjunto potencia denotado por  $\zeta = 2^Y$ , y la medida del espacio está dada por el vector de probabilidad  $(p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$ , donde  $p_j = m_j(i)$ . Los rectángulos medibles son los  $A_j$  definidos anteriormente. Al conjunto  $\{(x_i)_{-\infty}^{\infty} \in X | x_j \in A_j \text{ para } |j| \leq n\}$ , lo llamaremos un *bloque* con puntos terminales  $-n, n$ . Le asignaremos la medida  $m(A) = \prod_{j=-n}^n m_j(A_j)$ . Se pueden considerar bloques con puntos terminales distintos  $h$  y  $l$ , donde la única restricción es  $h \leq l$ , cuya medida estará dada por  $m(A) = \prod_{j=h}^l m_j(A_j)$ .

Al espacio  $(Y, \zeta, \mu)$  lo podemos pensar como un alfabeto con  $k$  letras distintas, cada letra tiene una cierta probabilidad asociada ( $p_i$ ) y la  $\sigma$ -álgebra es el conjunto de todas las combinaciones de letras posibles (i.e. El conjunto de todas las palabras posibles). El espacio de probabilidad generado por  $(X, \beta, m) = \prod_{-\infty}^{\infty} (Y, 2^Y, m)$  lo podemos imaginar como el espacio de copias infinitas de alfabetos.

## 2. Transformaciones que preservan medidas

Una vez que hemos construido nuestro espacio de medida deseamos ver qué tipo de funciones son medibles en él, para lo cual introduciremos los conceptos referentes a la medibilidad de las funciones [1, 2, 4].

**Definición 2.1.** Supongamos que  $(X_i, \beta_i, m_i)$  con  $i = 1, 2$ . Son espacios de probabilidad.

1. Una transformación  $T : X_1 \rightarrow X_2$  es **medible**, si dado  $B_2 \in \beta_2 \Rightarrow T^{-1}(B_2) \in \beta_1$ .

<sup>2</sup>En realidad esta no es una medida ya que esta se define como la medida de los conjuntos en la semiálgebra  $\rho$  la cual no tiene por qué estar definida en toda la  $\sigma$ -álgebra, sin embargo, por el teorema de extensión de Hanh-Banach [4], existe una medida definida en toda la  $\sigma$ -álgebra la cual coincide con  $m$  en los elementos de  $\rho$ .

2. Una transformación  $T : X_1 \rightarrow X_2$  es **invertible** si existe una transformación  $S$ , que cumple  $TS(y) = y$  y  $ST(x) = x$ , para casi todo<sup>3</sup>  $x \in X_1$  y para casi todo  $y \in X_2$ .
3. Se dice que  $T : X_1 \rightarrow X_2$  es una **transformación que preserva medida** si  $T$  es medible y  $m_1(T^{-1}(B_2)) = m_2(B_2) \forall B_2 \in \beta_2$ . En el caso donde los espacios de probabilidad  $(X_1, \beta_1, m_1)$  y  $(X_2, \beta_2, m_2)$  son iguales se dice que  $m_1$  es  $T$ -invariante o invariante bajo  $T$  y que  $T$  es un **automorfismo**.

Como ejemplo de un automorfismo[2, 5], definiremos una transformación que preserva medida en el espacio producto construido en la sección anterior:

Sea  $k \geq 2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  un entero fijo y sea  $(p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$  el vector de probabilidad ( $p_i > 0$  para cada  $i$ , además debe cumplir  $\sum_{i=0}^{k-1} p_i = 1$ ). El espacio de probabilidad que usaremos es  $(Y, \zeta, \mu)$ , en donde el conjunto  $Y$  está dado por  $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$  y el punto  $i$  tiene medida  $p_i$ . En la sección anterior generamos el espacio producto  $(X, \beta, m) = \prod_{-\infty}^{\infty} (Y, 2^Y, m)$ . En este espacio podemos definir el shift  $T : X \rightarrow X$  como  $T(\{\dots, x_{-1}, \widehat{x_0}, x_1, \dots\}) = \{\dots, x_{-1}, x_0, \widehat{x_1}, x_2, \dots\}$ , este shift recorre un lugar a la derecha la posición cero, la cual indicamos con  $\widehat{\phantom{x}}$ , este es un shift invertible, porque el producto directo tiene rango en todos los enteros y por tal motivo no pierde la información de iteraciones anteriores. Claramente preserva la medida, por la misma razón que es invertible. En algunos casos se le conoce como *two-sided shift map*. Estos shifts son un ejemplo de los llamados shifts de Bernoulli, nosotros nos referiremos a él como el shift a la derecha.

**Definición 2.2.** Sea  $(Y, \zeta, \mu)$  un espacio de probabilidad. Sea  $(X, \beta, m) = \prod_{-\infty}^{\infty} (Y, \zeta, \mu)$  y sea  $T : X \rightarrow X$  un shift  $T(\{x_n\}) = y_n$  donde  $y_n = x_{n+1}$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . entonces  $T$  es una transformación invertible que preserva medida llamada el shift de Bernoulli del espacio  $(Y, \zeta, \mu)$ .

Las transformaciones que preservan medida tienen una característica muy importante la cual está íntimamente ligada a los sistemas dinámicos, a partir del siguiente teorema se puede conocer cómo son las trayectorias en algunos sistemas dinámicos.

**Teorema 2.1** (Teorema de recurrencia de Poincaré). Sea  $T : X \rightarrow X$  un automorfismo del espacio de probabilidad  $(X, \beta, m)$ . Dado  $E \in \beta$  un conjunto de medida positiva. Sea  $F$  el conjunto de puntos  $x \in E$  tales que,  $T^n(x) \in E$  para un número infinito de  $n \geq 0$ , entonces  $F$  está contenido en  $E$  y ambos tienen la misma medida.

*Demostración.* Dado  $E$  un conjunto medible de medida positiva se construyen los conjuntos  $E_n$ .

$$E_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(E)$$

Notemos que  $E_0 = E \cup T^{-1}(E) \cup \dots$ , es decir que es el conjunto de puntos en  $X$  con al menos un  $T^n(x) \in E$ , para alguna  $n \geq 0$ . Para encontrar el conjunto de puntos que tienen un número infinito de

<sup>3</sup>Cuando decimos para casi todo, nos referimos que a que salvo un conjunto de medida cero la aseveración es verdadera.



iteraciones en  $E$ , se tiene que realizar la intersección de todos estos conjuntos  $E_n$  y luego itersectarlos con  $E$ .

$$F = E \cap \left( \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n \right),$$

es claro que  $F \subset E$ , por lo que sólo falta verificar que  $m(F) = m(E)$ , para lo cual nos fijamos que  $T^{-1}(E_n) = E_{n+1}$  y como  $m$  es una medida invariante bajo  $T$  se tiene que:

$$m(E_{n+1}) = m(T^{-1}(E_n)) = m(E_n),$$

y como los  $E_n$  están contruidos de forma decreciente, es decir que,  $E_0 \supset E_1 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$  lo cual implica que

$$m\left(\bigcap E_n\right) = m(E_0).$$

Entonces se tiene que  $m(F) = m(E \cap E_0) = m(E)$ , ya que  $E \subset E_0$ . □

Notemos que el teorema es falso si el espacio de medida usado tiene medida infinita. Como ejemplo de lo anterior sea  $T : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  $T(x) = x + 1$ , y sea  $\mu$  la medida de conteo, es decir que todo número entero tiene medida uno, si consideramos a  $E = \{0\}$  y así sucesivamente, los  $E_n$  tienen medida infinita, pero su intersección es el vacío, lo cual implica que  $m(\bigcap E_n) = 0$  y  $m(E) = 1$ .

## 2.1. Teoría ergódica.

A continuación introduciremos el concepto de cuándo una transformación es ergódica. La teoría ergódica se dedica a estudiar la dinámica de las transformaciones que preservan medida, sus orígenes se le atribuyen al matemático americano George David Birkhoff, miembro de la American Mathematical Society. La teoría ergódica se basa en el Teorema Ergódico de Birkhoff [6] establecido en el año de 1931.

**Definición 2.3.** Sea  $(X, \beta, m)$  un espacio de probabilidad. Una transformación  $T$  que preserva medida en  $(X, \beta, m)$  es llamada ergódica, si los únicos conjuntos  $B$  de  $\beta$  que cumplen con  $T^{-1}B = B$ , satisfacen que  $m(B) = 0$ , ó  $m(B) = 1$  (es decir, los únicos conjuntos invariantes bajo  $T$  tienen medida cero o uno).

Un ejemplo de una transformación ergódica es el shift a la derecha definido anteriormente.

**Lema 2.2.** El shift a la derecha es ergódico [2, 5, 7].

*Demostración.* Sea  $\rho$  el álgebra<sup>4</sup> formada por todas las uniones finitas de rectángulos medibles, recordemos que los rectángulos medibles son de la forma  $\{\{x_i\}_{-\infty}^{\infty} \in X | x_j \in A_j \text{ para } |j| \leq n\}$ . Supongamos que existe un elemento  $E \in \beta$  tal que  $T^{-1}E = E$ , entonces lo que se quiere demostrar es  $m(E) = 0$  o  $m(E) = 1$ . Como  $E \in \beta$ , sea  $\varepsilon > 0$  dada, escogemos  $A \in \rho$  de tal manera que la medida de la diferencia simétrica<sup>5</sup> entre  $A$  y  $E$  sea menor que  $\varepsilon$  (i.e.  $m(E\Delta A) < \varepsilon$ ).

Si calculamos :

$$\begin{aligned} |m(E) - m(A)| &= |m(E \cap A) + m(E \setminus A) \\ &\quad - m(A \cap E) - m(A \setminus E)| \\ &< m(E \setminus A) + m(A \setminus E) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora escogeremos un  $n_0$  suficientemente grande de tal manera que  $B = T^{-n_0}A$  dependa de coordenadas diferentes de las que depende  $A$ , entonces se puede garantizar  $m(A \cap B) = m(A)m(B) = m(A)^2$ , esto se debe a que  $m$  es una medida producto,

$$m(E\Delta B) = m(T^{-n}E\Delta T^{-n}A) = m(E\Delta A) < \varepsilon.$$

Como  $E\Delta(A \cap B) \subset (E\Delta A) \cup (E\Delta B)$ , se obtiene que  $m(E\Delta(A \cap B)) < 2\varepsilon$ , lo cual implica.

$$|m(E) - m(A \cap B)| < 2\varepsilon.$$

$$\begin{aligned} |m(E) - m(E)^2| &\leq |m(E) - m(A \cap B)| \\ &\quad + |m(A \cap B) - m(E)^2| \\ &\leq 2\varepsilon + |m(A)^2 - m(E)^2| \\ &\leq 2\varepsilon + m(A)|m(A) - m(E)| \\ &\quad + m(E)|m(A) - m(E)| \\ &< 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon$  es arbitraria tenemos  $m(E) = m(E)^2$  lo que implica que  $m(E) = 0$  o  $m(E) = 1$ . □

Existen otras formas de definir la ergodicidad de una transformación las cuales no vamos a definir aquí, sin embargo es importante mencionar que la noción de ergodicidad de una transformación o de un sistema dinámico nos da una idea sobre las órbitas del mismo sistema. Si una transformación es ergódica entonces las órbitas de sus trayectorias pueden ser densas en el espacio fase o pueden tener ciertas propiedades de distribución [5, 2]. A continuación enunciamos el teorema más importante de la teoría ergódica, que precisamente tiene que ver con las órbitas del sistema.

<sup>4</sup>Se define a un conjunto  $\rho$  como una álgebra si  $\rho$  cumple las siguientes condiciones:

- i) si  $A, B \in \rho$  entonces  $A \cap B \in \rho$ ,
- ii)  $\phi \in \rho$ ,
- iii) si  $A \in \rho$  entonces  $X \setminus A \in \rho$ .

<sup>5</sup>La diferencia simétrica se define como  $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

**Teorema 2.3** (Teorema ergódico de Birkhoff <sup>6</sup>). Sea  $T : (X, \beta, m) \rightarrow (X, \beta, m)$  una transformación que preserva medida, sea  $f \in L^1(m)$ . Entonces  $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$  converge para casi todo punto<sup>7</sup> a una función  $f^* \in L^1(m)$ . Es más,  $f^* \circ T = f^*$  c.d.q y si  $m(X) < \infty$ . Entonces,

$$\int f^* dm = \int f dm.$$

Nota: Si  $T$  es ergódica entonces  $f^*$  es constante c.d.q. Si  $m(X) < \infty$ ,

$$f^* = \frac{1}{n} \int f dm. \text{ c.d.q,}$$

si  $(X, \beta, m)$  es un espacio de probabilidad y  $T$  es ergódica tenemos  $\forall f \in L^1(m)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \int f dm.$$

**Definición 2.4.** Una transformación  $T$  que preserva medida es *Mixing* si  $\forall A, B \in \beta$ , donde  $\beta$  es la  $\sigma$ -álgebra del espacio de probabilidad.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(T^{-n}A \cap B) = m(A)m(B). \quad (2)$$

Observemos que la condición de mixing implica ergodicidad.

## 3. Entropía e isomorfismos.

### 3.1. Isomorfismos

El problema principal que se presenta en la teoría ergódica es decidir cuándo dos transformaciones que preservan medida son equivalentes, es decir cuándo dos transformaciones son isomorfas. La manera de resolver este problema es fijándose en los invariantes bajo los isomorfismos. En la teoría ergódica los invariantes suelen ser de dos tipos. El primer tipo es una propiedad que ciertas transformaciones tienen y otras no, nos referimos a la ergodicidad. Esta propiedad es importante, sin embargo no es muy útil para decidir si dos transformaciones son isomorfas, como ejemplo podemos mencionar los shifts a la derecha, sabemos que absolutamente todos ellos son ergódicos pero ¿Cuándo dos de ellos son isomorfos? Esta

<sup>6</sup>La demostración de este teorema se puede revisar en [2, 5, 6], cabe mencionar que esta demostración es bastante compleja.

<sup>7</sup>En algunas ocasiones diremos casi donde quiera (c.d.q.) en lugar de para casi todo punto

pregunta tiene una respuesta a partir de 1958, fecha en la que Kolmogorov introduce la noción de entropía en la teoría ergódica. La entropía resulta ser un invariante bajo isomorfismos, en el caso específico de los shifts a la derecha el concepto de entropía permite establecer el teorema de Ornstein, que clasifica a los shifts de Bernoulli en clases de isomorfismos. A continuación daremos la definición de isomorfismo entre transformaciones que preservan medida [2].

**Definición 3.1.** Sean  $(X_i, \beta_i, m_i)$  con  $i = 1, 2$  dos espacios de probabilidad junto con sus transformaciones que preservan medida,

$$T_1 : X_1 \rightarrow X_1, T_2 : X_2 \rightarrow X_2.$$

Entonces decimos que  $T_1$  es *isomorfo* a  $T_2$ , si existen  $M_1 \in \beta_1$  y  $M_2 \in \beta_2$  con  $m_1(M_1) = 1, m_2(M_2) = 1$ , tal que,

1.  $T_1 M_1 \subseteq M_1, T_2 M_2 \subseteq M_2$ .
2. Existe una transformación  $\Phi$  invertible que preserve medida, tal que,

$$\Phi : M_1 \rightarrow M_2, \quad \Phi T_1(x) = T_2 \Phi(x) \forall x \in M_1. \quad (3)$$

Si existe el isomorfismo  $(\Phi)$  entre  $T_1$  y  $T_2$  lo denotaremos como  $T_1 \approx T_2$ .

Notemos que estamos suponiendo implícitamente en (2) que los  $M_i$ 's están equipados con una  $\sigma$ -álgebra y la restricción de la medida a la  $\sigma$ -álgebra. El isomorfismo define una relación de equivalencia entre espacios de probabilidad.

## 3.2. Entropía

En esta sección introduciremos el concepto de entropía, el cual introduciremos en tres etapas. Primero definiremos la entropía para una partición, posteriormente definiremos la entropía condicional y por último definiremos la entropía de una transformación. En este proceso mostraremos un ejemplo de cómo calcular la entropía [2, 4].

**Definición 3.2.** Una partición de un espacio de medida  $(X, \beta, m)$  es una colección disjunta de elementos de  $\beta$  cuya unión es  $X$ . En particular solo estaremos interesados en particiones finitas. Si  $\xi$  es una partición finita de  $(X, \beta, m)$ , entonces la colección de todos los elementos de  $\beta$ , que son uniones de elementos de  $\xi$  es una sub- $\sigma$ -álgebra de  $\beta$ , la denotaremos como  $\mathcal{A}(\xi)$ . De manera inversa, si  $\mathcal{C}$  es una sub- $\sigma$ -álgebra finita de  $\beta$ ,  $\mathcal{C} = \{C_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ , entonces los conjuntos no vacíos de la forma  $B_1 \cap \dots \cap B_n$ , donde  $B_i = C_i$  ó  $B_i = X \setminus C_i$ , forman una partición finita de  $(X, \beta, m)$  que denotaremos por  $\xi(\mathcal{C})$ . Con esto se tiene una correspondencia uno a uno entre sub- $\sigma$ -álgebra finitas y particiones finitas.

**Definición 3.3.** Supongase que  $T : X \rightarrow X$  es una transformación que preserva medida, sea  $\xi = (A_1, \dots, A_n)$  una partición de un espacio de medida  $(X, \beta, m)$ , entonces  $T^{-n}\xi$  denota la partición  $\xi = (T^{-n}A_1, \dots, T^{-n}A_n)$  y si  $\mathcal{A}$  denota una sub- $\sigma$ -álgebra de  $\beta$  entonces  $T^{-n}\mathcal{A}$  denota al conjunto  $T^{-n}\mathcal{A} = \{T^{-n}A | A \in \mathcal{A}\}$ , con  $(n \geq 0)$ .

Una partición  $\xi = (A_1, \dots, A_n)$  de un espacio de medida  $(X, \beta, m)$  puede ser pensada como una lista de eventos posibles de un experimento, donde la probabilidad de ocurrencia del evento  $A_i$  se encuentra dada por la medida del conjunto  $(m(A_i))$ . La entropía busca asociar a estos eventos una cantidad  $H(\xi)$ . Una vez que tenemos asociada la partición de un evento deseamos medir cuánto hemos ganado con la realización de este evento, es como medir la probabilidad de que ocurran todos los eventos posibles dado que ya sucedió uno de ellos.

Supongamos que  $\xi = (A_1, \dots, A_n)$  y  $\eta = (B_1, \dots, B_m)$  son particiones finitas de un espacio de medida  $(X, \beta, m)$ , como hemos dicho estas particiones representan dos eventos distintos. Si queremos medir la probabilidad de ocurrencia de  $\xi$  dado que  $\eta$  ya sucedió, la teoría de la probabilidad nos dice que la probabilidad de que suceda  $A_i$  dado  $B_j$  es,  $m(A_i \cap B_j)/m(B_j)$ , entonces en nuestro caso tenemos:

$$H\left(\frac{m(A_1 \cap B_j)}{m(B_j)}, \frac{m(A_2 \cap B_j)}{m(B_j)}, \dots, \frac{m(A_n \cap B_j)}{m(B_j)}\right), \quad (4)$$

para calcular la probabilidad de  $\xi$  dado  $\eta$  hacemos:

$$H(\xi/\eta) = \sum_{j=1}^m m(B_j) H\left(\frac{m(A_1 \cap B_j)}{m(B_j)}, \frac{m(A_2 \cap B_j)}{m(B_j)}, \dots, \frac{m(A_n \cap B_j)}{m(B_j)}\right).$$

Esto en si no aclara mucho más de lo que ya sabemos, pero la función  $H(\xi)$  queda determinada por el siguiente teorema:

**Teorema 3.1** (Propiedades de la entropía <sup>8</sup>). Sea  $\Delta_k = \{(p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{R}^k | p_i \geq 0, \sum_{j=1}^k p_j = 1\}$  supongase  $H : \cup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \rightarrow \mathbb{R}$  tiene las siguientes propiedades.

1.  $H(p_1, \dots, p_k) \geq 0$ , y  $H(p_1, \dots, p_k) = 0$  si y solo si  $p_i = 1$  para algún  $i$ .
2. Para cada  $k \geq 1, H|_{\Delta_k}$  es continua.
3. Para cada  $k \geq 1, H|_{\Delta_k}$  es simétrica.

<sup>8</sup>La demostración del teorema se puede revisar en [2, 5, 6], cabe mencionar que esta demostración es bastante extensa.

4. Para cada  $k \geq 1$ ,  $H|_{\Delta_k}$  alcanza su máximo en  $(1/k, \dots, 1/k)$ , donde se tienen  $k$  factores.
5.  $H(\xi \vee \eta)^9 = H(\xi) + H(\eta/\xi)$  donde  $H(\eta/\xi)$  está dado por la ecuación (4).
6.  $H(p_1, \dots, p_k, 0) = H(p_1, \dots, p_k)$ .

Entonces existe  $\lambda > 0$  tal que

$$H(p_1, \dots, p_k) = -\lambda \sum_{i=1}^k p_i \log p_i$$

El teorema permite definir la entropía de una partición finita como:

$$H(\xi) = -\sum_{i=1}^k m(A_i) \log m(A_i).$$

y la entropía condicional, la cual es muy útil para derivar propiedades de la entropía de una transformación y de una partición. Dadas  $\xi = (A_1, \dots, A_n)$  y  $\eta = (B_1, \dots, B_m)$  particiones finitas de un espacio de medida  $(X, \beta, m)$ , definimos la entropía condicional como:

$$H(\xi/\eta) = -\sum_j^m \sum_i^n m(A_i \cap B_j) \log \frac{m(A_i \cap B_j)}{m(B_j)}$$

**Propiedades 3.2.** Sean  $\xi_1 = (A_1, \dots, A_n)$ ,  $\eta = (B_1, \dots, B_m)$  y  $\xi_2 = (C_1, \dots, C_n)$ , particiones finitas. Entonces  $H$  tiene las siguientes propiedades,

1.  $0 \leq H(\eta) \leq \log m$ .
2.  $H(\xi_1 \vee \xi_2/\eta) = H(\xi_1/\eta) + H(\xi_2/\xi_1 \vee \eta)$ .
3.  $\xi_1 \subseteq \xi_2 \Rightarrow H(\xi_1/\eta) \leq H(\xi_2/\eta)$ .
4.  $\xi_1 \subseteq \xi_2 \Rightarrow H(\xi_1) \leq H(\xi_2)$ .
5.  $\xi_1 \subseteq \eta \Rightarrow H(\xi_1/\xi_2) \geq H(\xi_1/\eta)$ .
6.  $H(\xi_1) \geq H(\xi_1/\eta)$ .
7.  $H(\xi_1 \vee \xi_2/\eta) \leq H(\xi_1/\eta) + H(\xi_2/\eta)$ .
8.  $H(\xi_2 \vee \eta) \leq H(\xi_1) + H(\eta)$ .

---

<sup>9</sup>Definimos la unión de dos particiones finitas como,

$$\xi \vee \eta = \{A_i \cap B_j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\},$$

donde  $A_i \in \xi$  y  $B_i \in \eta$ .

$$9. H(\eta/\xi_1 \vee \xi_2) \leq H(\eta/\xi_1).$$

Estas propiedades también son válidas para las sub- $\sigma$ -álgebra, de hecho en algunas ocasiones se trabaja con sub- $\sigma$ -álgebra de manera indistinta. Antes de definir la entropía para una transformación enunciaremos el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.** Denotemos por  $\nabla$  al espacio de todas las sub- $\sigma$ -álgebra finitas. Este espacio es un espacio métrico, cuya métrica está dada por:

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}/\mathcal{B}) + H(\mathcal{B}/\mathcal{A}).$$

Este teorema es sencillo de demostrar, primeramente como  $H \geq 0$  implica que  $d \geq 0$ , la igualdad solo se da si las dos sub- $\sigma$ -álgebra son equivalentes. La desigualdad del triángulo se cumple a partir de las propiedades anteriores.  $\square$

Dada una partición  $\xi(\mathcal{A}) = (A_1, \dots, A_n)$  de un espacio de medida  $(X, \beta, m)$  los elementos de la partición son de la forma  $\xi(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A}) = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \xi(\mathcal{A})$ , que son todos los elementos de la forma  $\bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i} A_{j_i}$ . Enseguida definiremos la entropía de una transformación, como:

**Definición 3.4.** Sea  $T : X \rightarrow X$  una transformación que preserva medida en el espacio de probabilidad  $(X, \beta, m)$ . Si  $\mathcal{A}$  es una sub- $\sigma$ -álgebra finita de  $\beta$  entonces la *entropía de T* con respecto a  $\mathcal{A}$  es:

$$h(T, \xi(\mathcal{A})) = h(T, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left( \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A} \right),$$

notemos que  $h(T, \mathcal{A}) \geq 0$  y además el límite siempre existe.

**Definición 3.5.** La entropía de una transformación es el supremo de la *entropía de T* con respecto a  $\mathcal{A}$  sobre todas las particiones finitas, es decir:

$$h(T) = \sup\{h(T, \mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ es una partición finita}\},$$

notemos que este supremo puede ser  $\infty$ , y en el caso que  $T = Id_X$ , se tiene  $h(Id_X) = 0$ .

**Propiedades 3.4.** Supongase,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{C}$  son sub- $\sigma$ -álgebra finitas de  $\beta$ , sea  $T$  una transformación que preserva medida del espacio de medida  $(X, \beta, m)$ . Entonces  $h(T, \mathcal{A})$  tiene las siguientes propiedades:

1.  $h(T, \mathcal{A}) \leq H(\mathcal{A})$ .
2.  $h(T, \mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \leq h(T, \mathcal{A}) + h(T, \mathcal{C})$ .
3.  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow h(T, \mathcal{A}) \leq h(T, \mathcal{C})$ .
4.  $h(T, \mathcal{A}) \leq h(T, \mathcal{C}) + H(\mathcal{A}/\mathcal{C})$ .
5.  $h(T, T^{-1} \mathcal{A}) = h(T, \mathcal{A})$ .

6. Si  $k \geq 1$   $h(T, \mathcal{A}) = h(T, \bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i} \mathcal{A})$ .

7. Si  $T$  es invertible y  $k \geq 1$ . Luego,

$$h(T, \mathcal{A}) = h\left(T, \bigvee_{i=-k}^k T^i \mathcal{A}\right).$$

8.  $|h(T, \mathcal{A}) - h(T, \mathcal{C})| \leq d(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ . Lo significa que  $h(T, \cdot)$  es una función continua, real valuada en el espacio métrico  $(\nabla, d)$ . La demostración de esta propiedad se deduce de manera inmediata de la propiedad (4).

**Teorema 3.5** (Teorema de Kolmogorov-Sinai). Sea  $T$  una transformación que preserva medida, invertible en el espacio de probabilidad  $(X, \beta, m)$  y sea  $\mathcal{A}$  una sub-  $\sigma$ -álgebra finita de  $\beta$  tal que  $\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^n \mathcal{A} \stackrel{\circ}{=} \beta$ <sup>10</sup>. Entonces,

$$h(T) = h(T, \mathcal{A}).$$

Lo que el teorema afirma es que la partición genera a la  $\sigma$ -álgebra, además si tenemos una sub-  $\sigma$ -álgebra generadora tan solo tenemos que calcular el límite de la entropía de la partición. En principio calcular la entropía parece complicado, sin embargo por medio de sus propiedades se pueden llegar a establecer algunos métodos para obtenerla, como en el teorema anterior.

**Lema 3.6.** El shift a la derecha  $(p_0, \dots, p_{k-1})$  tiene entropía,

$$-\sum_{i=0}^{k-1} p_i * \log p_i.$$

*Demostración.* Sea  $Y$  un abecedario de  $k$  letras ( $Y = (0, \dots, k-1)$ ),  $X = \prod_{-\infty}^{\infty} Y$ , como ya vimos anteriormente este es un espacio de medida, la medida de un rectángulo ( $A$ ) está dada por  $m(A) = \prod_{j=-n}^n m_j(A_j)$ . Anteriormente definimos el shift a la derecha ( $T$ ) en este espacio, el cual vimos es una transformación que preserva medida y es ergódico. Sea  $A_i = \{\{x_i\} : x_0 = i\}$ , con  $0 \leq i \leq k-1$ . El conjunto  $\xi = (A_0, \dots, A_{k-1})$  forma una partición finita de  $X$ , entonces sea  $\mathcal{A}(\xi)$  una sub- $\sigma$ -álgebra de  $X$ . Dada la definición de la  $\sigma$ -álgebra ( $\beta$ ) producto y por el shift a la derecha obtenemos:

$$\bigvee_{i=-\infty}^{\infty} T^i \mathcal{A} = \beta,$$

ahora, aplicamos el teorema de Kolmogorov-Sinai (teorema (3.5)), para llegar a:

$$\begin{aligned} h(T) &= h(T, \mathcal{A}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{A} \vee T^{-1} \mathcal{A} \vee \dots \vee T^{-(n-1)} \mathcal{A}). \end{aligned}$$

<sup>10</sup>Dos sub-  $\sigma$ -álgebra son "equivalentes" ( $\mathcal{A} \stackrel{\circ}{=} \mathcal{B}$ ) si  $\forall A \in \mathcal{A}$  existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $m(A \Delta B) = 0$  y además  $\forall B \in \mathcal{B}$  existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $m(B \Delta A) = 0$ .



Recordemos que los elementos típicos de la unión de dos particiones finitas son intersecciones de los elementos de la partición, por lo tanto, un elemento de  $\xi(\mathcal{A} \vee T^{-1}\mathcal{A} \vee \dots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{A})$  es de la forma,

$$\begin{aligned} A_{i_0} \cap T^{-1}A_{i_1} \cap \dots \cap T^{-(k-1)}A_{i_{n-1}} \\ = \{ \{x_n\} : x_0 = i_0, x_1 = i_1, \dots, x_{n-1} = i_{n-1} \}, \end{aligned}$$

cada uno de estos elementos tiene medida  $p_{i_0} * p_{i_1} * \dots * p_{i_{n-1}}$ , por lo tanto al calcular  $H$  se tiene:

$$\begin{aligned} H(\mathcal{A} \vee T^{-1}\mathcal{A} \vee \dots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{A}) \\ = - \sum (p_{i_0} * p_{i_1} * \dots * p_{i_{n-1}}) * \log(p_{i_0} * p_{i_1} * \dots * p_{i_{n-1}}) \\ = - \sum_{i_0, \dots, i_{n-1}=0}^{k-1} (p_{i_0} * p_{i_1} * \dots * p_{i_{n-1}}) * (\log p_{i_0} + \log p_{i_1} + \\ \dots + \log p_{i_{n-1}}) \\ = -n \sum_{i=0}^{k-1} p_i * \log p_i, \end{aligned}$$

por lo que  $h(T) = h(T, \mathcal{A}) = - \sum_{i=0}^{k-1} p_i * \log p_i$ . □

**Teorema 3.7** (Teorema de Shanon-McMillan-Breiman). Supongamos que  $T$  es un automorfismo en el espacio de medida  $(X, \beta, m)$ , sea  $\xi$  una partición finita arbitraria del espacio  $X$ . Entonces para casi toda  $\{x\} \in X$ , se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ - \frac{1}{n} \ln(m(C^{(n)}(\{x\}))) \right] = h(T, \xi),$$

donde  $C^{(n)}(\{x\})$  es el elemento de la partición  $\xi \vee T\xi \vee \dots \vee T^{n-1}\xi$  que contiene a  $\{x\}$ .

Si  $h(T, \xi) > 0$ , entonces  $m(C^{(n)}(\{x\}))$  tiende a cero de manera exponencial  $e^{-h(T, \xi)}$ , para casi toda  $\{x\} \in X$  y también se puede deducir que, si  $\varepsilon \in (0, 1)$  y  $g_n(\varepsilon)$  denota al menor número de elementos necesarios en  $\xi \vee T\xi \vee \dots \vee T^{n-1}\xi$  para tener un conjunto de medida total de al menos  $1 - \varepsilon$ , entonces  $(1/n)\ln(g_n(\varepsilon)) \rightarrow h(T, \xi)$ .

**Corolario 3.8.** Para cualquier  $\varepsilon > 0$ , denotemos por  $E_\varepsilon^{(n)}$  la unión de todos los elementos  $C^{(n)}(\{x\}) \stackrel{\text{def}}{=} C^{(n)} \in \xi \vee T\xi \vee \dots \vee T^{n-1}\xi$ , tales que,

$$\exp(-n[h(T, \xi) + \varepsilon]) < m(C^{(n)}) < \exp(-n[h(T, \xi) - \varepsilon]), \tag{5}$$

entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(E_\varepsilon^{(n)}) = 1$ .

Este corolario se puede reformular como sigue: Para una  $\varepsilon > 0$  dada, esta particiona el conjunto de todos los cilindros  $C^{(n)}$  de longitud  $n$  en dos clases. La primera contiene a todos los cilindros que satisfacen la ecuación 5, la segunda clase son el complemento, entonces la medida total de los cilindros de longitud  $n$  contenidos en la segunda clase tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ .

En resumen, tenemos un espacio de probabilidad que proviene de un producto infinito de copias de otro espacio, en el cual hemos definido una transformación que preserva medida y que es ergódica, además hemos

podido determinar la entropía del shift a la derecha. Pero la pregunta de cuándo dos transformaciones son "iguales" (isomorfias) aun no tiene respuesta. El estudio de la entropía de una transformación precisa de una respuesta ya que la entropía tiene como propiedad ser un invariante bajo isomorfismos. En este punto hay que tener cierto cuidado, puesto que, si la transformación tiene entropía igual a cero entonces esta no es un buen invariante, por lo que consideraremos transformaciones con entropía distinta de cero.

## 4. Teorema de Ornstein

Este teorema fue formulado en 1970 por Donald Samuel Ornstein [8], su teorema le permitió ganar el prestigioso premio Bocher en el año de 1974.

**Teorema 4.1** (Teorema de Ornstein). Sea  $(Y_1, \zeta_1, \hat{p})$  un espacio de probabilidad con vector de probabilidad  $\hat{p} = (p_0, \dots, p_{m-1})$  y abecedario  $Y_1 = (0, 1, \dots, m-1)$ . Consideremos el espacio producto  $(X_1, \beta_1, m_1)$  en donde  $X_1 = \prod_{-\infty}^{\infty} (Y_1, \zeta_1, \hat{p})$ ,  $\beta_1$  es la  $\sigma$ -álgebra producto y  $m_1$  es la medida producto del espacio. De la misma manera podemos definir el espacio de probabilidad  $(Y_2, \zeta_2, \hat{q})$  con vector de probabilidad  $\hat{q} = (q_0, \dots, q_{n-1})$  y abecedario  $Y_2 = (0, 1, \dots, n-1)$ . Consideremos el espacio producto  $(X_2, \beta_2, m_2)$  en donde  $X_2 = \prod_{-\infty}^{\infty} (Y_2, \zeta_2, \hat{q})$ ,  $\beta_2$  es la  $\sigma$ -álgebra producto y  $m_2$  es la medida producto del espacio. Para cada uno de los espacios  $(X_i, \beta_i, m_i)$  con  $i = 1, 2$  podemos definir los respectivos shifts de Bernoulli  $T_1$  y  $T_2$ . Si los shifts tienen la misma entropía ( $h(T_1) = h(T_2)$ ), entonces los shifts son isomorfos ( $T_1 \approx T_2$ ).

Antes de empezar la demostración daremos la idea que seguiremos, la cual se fundamenta en las demostraciones realizadas en [5, 7, 9, 10]. Es posible suponer que dos shifts con la misma entropía tienen un elemento del vector de probabilidad en común ( $p_i = q_j$ ) para alguna  $i = 0, \dots, m-1$  y para alguna  $j = 0, \dots, n-1$ . Esto permitirá suponer que el elemento con la misma probabilidad en ambos shifts es el primer elemento ( $p_0 = q_0$ ), posteriormente generaremos los shifts de marcadores que mandan el cero al cero y las demas letras a "X". Esto conducirá al concepto de los esqueletos, en los cuales identificaremos ciertas propiedades típicas de los esqueletos, dicho concepto permitirá identificar conjuntos típicos que están en ambos espacios. De manera simultánea tendremos el concepto de rellenos los cuales estudiaremos para determinar las propiedades de algunos rellenos que se consideran típicos, estos permitirán dividir el espacio de rellenos en clases de equivalencia. Ambos conceptos nos permitirán introducir el lema de matrimonio de combinatoria para llevar a cabo el apareamiento correcto entre los dos shifts. Al realizar este apareamiento construiremos el isomorfismo. Comenzaremos enunciando y demostrando un lema auxiliar.

**Lema 4.2.** Si  $n \geq 3$  y  $m \geq 3$ , existe un vector de probabilidad  $\hat{r} = (r_0, \dots, r_k)$ , tal que,

$$-\sum_{i=0}^{k-1} r_i \log r_i = h(T_1) = h(T_2), \quad (6)$$

y además  $r_0 = p_i$ ,  $r_1 = q_j$  para algún  $i, j$ , donde  $T_1$  y  $T_2$  son Shifts de Bernoulli.

*Demostración.* Sin perdida de generalidad podemos suponer que los vectores de probabilidad se encuentran ordenados de la siguiente manera,

$$p_0 \geq p_1 \geq \dots \geq p_{m-1},$$

$$q_0 \geq q_1 \geq \dots \geq q_{n-1} \quad \text{y} \quad p_{m-1} \geq q_{n-1},$$

este ordenamiento de los vectores permite construir el vector de probabilidad ( $\hat{r}$ ), de la siguiente manera: Sean  $r_0 = p_0$ ,  $r_1 = q_{n-1}$  y  $r'_2 = 1 - r_0 - r_1$ , valores para el vector  $r = (r_0, r_1, r'_2)$ , este vector cumple con la propiedad de  $H(r) \leq H(\hat{p})$ , además sabemos que  $H$  alcanza su máximo (propiedades 3.1) cuando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H \left( r_0, r_1, \frac{r'_2}{n}, \dots, \frac{r'_2}{n} \right) \rightarrow \infty,$$

como la función  $H$  es una función continua podemos encontrar un vector  $\hat{r}$  tal que tenga la entropía deseada.  $\square$

En la demostración de este lema se puede suponer que al menos una de las letras de los alfabetos  $Y_1, Y_2$  tiene la misma probabilidad, de hecho se puede suponer que el "cero" es la letra que tiene la misma probabilidad (i.e.  $p_0 = q_0$ ). Esto lleva a establecer una relación entre los dos espacios por medio de una construcción auxiliar. Ahora lo que queremos es simplemente enviar los dos alfabetos a alfabetos binarios, es decir, los ceros irán a los ceros y a las otras letras les asignaremos "X". A estos shifts los llamaremos shifts de marcadores. Como ejemplo daremos el shift de marcadores del espacio  $Y_1$  en el espacio binario  $Y'_1$ , donde el vector de probabilidad del espacio binario es  $(p_0, 1 - p_0)$ .

Ahora definamos formalmente los shifts de marcadores. Dado el espacio de probabilidad  $Y_1$  definimos a  $\sigma^{\hat{p}}$  como un shift que depende del vector de probabilidad  $\hat{p}$  de tal manera que:

$$\sigma^{\hat{p}} : X_1(\hat{p}) \rightarrow X'_1(p_0, 1 - p_0).$$

El espacio  $X'_1$  tiene un alfabeto binario, es decir, de ceros y "X"s. El valor de la  $j$ -ésima coordenada está dada por:

$$\sigma_j^{\hat{p}}(\{x\}) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_j = 0; \\ \text{"X"}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De manera análoga podemos definir el mapeo  $\sigma^{\hat{q}}$ . Esto permite "partir" a cada uno de nuestros espacios en dos espacios, el binario y el espacio con el abecedario  $(1, 2, \dots, k - 1)$  donde  $k = n, m$  según sea el caso. El espacio binario introduce el concepto de esqueletos y por otro lado el abecedario restante da pie al concepto de rellenos. A continuación introduciremos el concepto de esqueletos.

## 4.1. Esqueletos

**Definición 4.1.** Sea  $N_1 < N_2 < \dots < N_r < \dots$  una sucesión de números naturales creciente (esta sucesión de números naturales la especificaremos más adelante), definimos a un *esqueleto* como una sucesión finita de ceros y "X"s que empieza y termina con ceros:

$$\Sigma = \overbrace{00 \dots 0}^{n_0} \underbrace{XX \dots X}_{l_1} \overbrace{00 \dots 0}^{n_1} \underbrace{XX \dots X}_{l_2} \overbrace{00 \dots 0}^{n_2} \dots \underbrace{XX \dots X}_{l_k} \overbrace{00 \dots 0}^{n_k},$$

en donde cada  $n_i$  con  $i = 0, \dots, k$  es el número de ceros y cada  $l_i$  con  $i = 1, \dots, k$  es el número de "X"s. A la pareja  $s = (r, \Sigma)$  que consiste de un número natural  $r$  y de la configuración de un esqueleto ( $\Sigma$ ), le denotaremos por el esqueleto de rango  $r$  si:

1.  $l_t \geq 1, 1 \leq t \leq k$ ;
2.  $n_t \geq 1, 0 \leq t \leq k$ ;
3.  $n_t < N_r \leq \min(n_0, n_k), 1 \leq t \leq k - 1$ .

Notemos que una misma configuración puede dar lugar a esqueletos de distintos rangos, estos esqueletos son distintos entre sí, ya que el rango es distinto. Denotemos por  $\rho(s)$  al rango del esqueleto  $s$  y  $l(s) = l_1 + \dots + l_k$  como la longitud del esqueleto  $s$ , por último diremos que  $s' = (r', \Sigma')$  es un subesqueleto de  $s$ , si su configuración es de la forma.

$$\Sigma' = \overbrace{00 \dots 0}^{n_t} \underbrace{XX \dots X}_{l_{t+1}} \overbrace{00 \dots 0}^{n_{t+1}} \underbrace{XX \dots X}_{l_{t+2}} \overbrace{00 \dots 0}^{n_{t+3}} \dots \underbrace{XX \dots X}_{l_{t'}} \overbrace{00 \dots 0}^{n_{t'}}$$

para algún  $t \geq 0$  y para algún  $t' \leq k$ .

Dos subesqueletos son disjuntos si los conjuntos  $\{t + 1, \dots, t'\}$  son disjuntos (el conjunto final de ceros de uno puede ser el conjunto inicial de ceros del siguiente subesqueleto, es decir no importa que los conjuntos de ceros se solapen, lo importante es que los conjuntos de  $X$ 's sean ajenos). Si  $s_1, \dots, s_q$  son subesqueletos del esqueleto  $s$ , forman una partición de  $s$  si son disjuntos dos a dos y la unión de los conjuntos  $\{t + 1, \dots, t'\}$  son el conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$ . La partición de un esqueleto en subesqueletos la denotaremos por:

$$s = s_1 \oplus \dots \oplus s_q.$$

**Lema 4.3** (Lema de los esqueletos). El siguiente lema nos dará una idea más precisa sobre los esqueletos.

1. Cada esqueleto  $s$  de rango  $r > 1$  admite una única descomposición en subesqueletos de rango  $r - 1$ .
2. Para casi toda  $\{x\} \in X_1$ , pasa una de las siguientes dos cuestiones: La coordenada cero de  $\{x\}$  es cero (i.e.  $x_0 = 0$ ) o para cada  $r \geq 1$  existe un único esqueleto de rango  $r$  que contiene a la coordenada cero de  $\{x\}$ .
3. Dada una secuencia  $L_1, \dots, L_r, \dots$  de números naturales que tiende a infinito, podemos elegir  $N_1, \dots, N_r, \dots$  (números naturales que aparecen en la definición de esqueleto) de tal manera que casi para toda  $\{x\} \in M^*$ ,  $l(s_r(x)) \geq L_r$  para una  $r$  suficientemente grande. Denotemos como  $M^* = \{\{x\} \in X_1 : x_0 \neq 0\}$ .

1. *Demostración.* A partir de la definición de esqueleto sucede:

- Si  $n_t < N_{r-1}, 1 \leq t \leq k - 1$ . Entonces  $r - 1$  es un posible rango para la configuración  $\Sigma$ .
- En caso contrario el conjunto  $\{t : 1 \leq t \leq k - 1, n_t \geq N_{r-1}\}$  es no vacío, este conjunto genera una partición del esqueleto en subesqueletos de rango  $r - 1$ . Ambas descomposiciones son únicas.  $\square$

2. *Demostración.* Sean  $r$  y  $\{x\} \in X_1$  fijas, supongamos que  $x_0 \neq 0$ . Como punto inicial tomemos  $x_0$ , ahora recorramos a la izquierda y a la derecha tantos lugares como sean necesarios hasta encontrar dos bloques de ceros con longitud mayor o igual a  $N_r$ . Siempre es posible encontrar estos esqueletos ya que la probabilidad de encontrar un bloque de longitud al menos  $N_r$  es uno.  $\square$
3. *Demostración.* Supongamos que definimos  $N_1 < N_2 < \dots < N_r$  y los esqueletos  $s_1(x), \dots, s_q(x)$ , con  $\{x\} \in M^*$ , están definidos de tal manera que

$$\mu(E_k) < \frac{1}{2^k}, \quad 1 \leq k \leq r,$$

donde  $E_k = \{x \in M^* : l(s_k(x)) < L_r\}$ . Ello siempre es posible, ya que:

$$E_k \subset \bigcup_{i=1}^{L_k N_k + 1} \{\{x\} : \text{El bloque con } N_k \text{ ceros aparece en la } i\text{-ésima coordenada}\},$$

este conjunto tiene medida menor a  $(L_k N_k + 1) * (p_0)^{N_k} < 1/2^k$ , para una  $N_k$  apropiada. Hagamos enseguida un cambio de notación. si  $N := N_{r+1}$ , entonces el esqueleto  $s_{r+1}(x)$  depende de  $N$ , por lo cual lo denotaremos por  $s_{r+1}^N(x)$ . Haciendo tender  $N$  a infinito, la longitud del esqueleto también tiende a infinito. Conforme  $N$  tiende a infinito los valores de  $n_0$  y  $n_k$  se incrementan, lo que provoca que la longitud del esqueleto se incremente, es decir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} l(s_{r+1}^N(x)) = \infty,$$

lo cual nos permite tomar  $N_{r+1}$  lo suficientemente grande para  $\mu(E_{r+1}) \leq \frac{1}{2^{r+1}}$ . Esto pasa para toda  $r = 1, 2, \dots$ , y como  $\sum_{r=1}^{\infty} \mu(E_r) < \infty$  lo cual es cierto para casi toda  $\{x\} \in M^*$ , entonces, podemos aplicar el lema de Borel-Cantelli<sup>11</sup>. Este lema nos permite concluir que para casi todos los puntos  $\{x\} \in M^*$  estos pertenecen a un número finito de  $E_r$ . Con lo anterior queda demostrado el lema.  $\square$

Con las demostraciones anteriores hemos ofrecido una mejor idea de cómo están constituidos los esqueletos y de algunas propiedades acerca de ellos. El siguiente paso en la demostración del teorema de Ornstein es introducir el concepto de rellenos. Una última nota, la demostración anterior también sirve para el otro esqueleto, por lo cual solo tenemos una sucesión de  $N_r$ 's.

<sup>11</sup>Lema de Borel-Cantelli [11]. Sea  $\{A_n : n \in \mathbb{Z}^+\} \subset \sigma$  entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty \Rightarrow m\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq m} A_n\right) = 0.$$

De manera inversa, si los  $A_n$  son conjuntos independientes, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty \Rightarrow m\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq m} A_n\right) = 1.$$

## 4.2. Rellenos

Una vez que se tienen los esqueletos deseamos ver cómo acomodar las letras de los alfabetos en los lugares de las "X"s, para ello haremos de los alfabetos de relleno.

**Definición 4.2.** Para  $X_1$  se define el alfabeto de relleno como el conjunto  $Y_1^0 = (1, 2, \dots, m-1)$ , con medida de relleno  $\mu_0(k) = \frac{p_k}{1-p_0}$ , para cada una de las letras del abecedario  $Y_1^0$  (i.e.  $k = 1, \dots, m-1$ ). La entropía de relleno se define como  $-\sum_{i=1}^{m-1} \mu_0(i) \log \mu_0(i)$ . Por último se define el shift de relleno en el espacio  $X_1^0(\mu_0(1), \mu_0(2), \dots, \mu_0(m-1))$ .

**Definición 4.3.** Para  $X_2$  se define el alfabeto de relleno como el conjunto  $Y_2^0 = (1, 2, \dots, n-1)$ , con medida de relleno  $\nu_0(l) = \frac{q_l}{1-q_0}$  para cada una de las letras del abecedario  $Y_2^0$  (i.e.  $l = 1, \dots, n-1$ ). La entropía de relleno se define como  $-\sum_{j=1}^{n-1} \nu_0(j) \log \nu_0(j)$ . Por último se define el shift de relleno en el espacio  $X_2^0(\nu_0(1), \nu_0(2), \dots, \nu_0(n-1))$ .

**Lema 4.4.** La entropía de  $X_1^0$  y de  $X_2^0$  son iguales.

*Demostración.* Recordemos que  $p_0 = q_0$ , lo cual implica que  $1 - p_0 = 1 - q_0$ , comencemos con la entropía de  $X_1^0$ .

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^{m-1} \mu_0(i) \log \mu_0(i) \\
 &= - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{p_k}{1-p_0} \log \frac{p_k}{1-p_0} \\
 &= - \frac{1}{1-p_0} \sum_{i=1}^{m-1} p_k (\log p_k - \log (1-p_0)) \\
 &= - \frac{1}{1-p_0} \sum_{i=1}^{m-1} p_k \log p_k + \frac{1}{1-p_0} \log (1-p_0) \sum_{i=1}^{m-1} p_k \\
 &= - \frac{1}{1-p_0} \sum_{i=1}^{m-1} p_k \log p_k + \log (1-p_0) \\
 &= \frac{1}{1-p_0} (h(T_1) + p_0 \log p_0) + \log (1-p_0) \\
 &= \frac{1}{1-q_0} (h(T_2) + q_0 \log q_0) + \log (1-q_0) \\
 &= - \sum_{j=1}^{n-1} \nu_0(j) \log \nu_0(j).
 \end{aligned}$$

Las entropías de los shifts de relleno son iguales, a esta entropía en común la denotaremos por  $h_0$ .  $\square$

**Definición 4.4** (Conjuntos de Relleno). Sea  $s$  un esqueleto de longitud  $l(s) = l_1 + \dots + l_k$ , podemos identificar el conjunto de índices de  $s$  como  $I(s) = 1, \dots, k$ . Se define a los conjuntos de relleno como:

$$\mathcal{F}(s) = \{F = a_1 a_2 \dots a_k : \forall a_i \in Y_1^0\} \text{ para } X_1.$$

$$\mathcal{G}(s) = \{G = b_1 b_2 \dots b_k : \forall b_i \in Y_2^U\} \text{ para } X_2.$$

Notemos que en la definición anterior cada  $a_i$  es una letra del alfabeto de relleno  $Y_1^0$ . En realidad identificamos a cada relleno con el espacio producto de los alfabetos de relleno, es decir, si  $s = s_1 \oplus \dots \oplus s_q$ , entonces  $I(s) = \cup_{i=1}^q I(s_i)$ , esta unión es disjunta, lo que implica  $\mathcal{F}(s) = \prod_{i=1}^q \mathcal{F}(s_i)$ . A continuación definimos una relación de equivalencia dentro de los conjuntos de relleno, para identificar ciertos rellenos típicos. Establecer la relación de equivalencia nos permite determinar la sucesión de números naturales  $N_1 < N_2 < \dots < N_r$ , que aparece en la definición de los esqueletos.

#### 4.2.1. Definición de las clases de equivalencia en los rellenos

Para un esqueleto  $s$  de rango  $r$  construimos la relación de equivalencia  $\sim$  en el conjunto  $\mathcal{F}(s)$ . La clase de equivalencia de un relleno  $F \in \mathcal{F}(s)$  depende de un subconjunto  $I(F)$  del conjunto de índices  $I(s)$  y consiste en todos los rellenos  $F' \in \mathcal{F}(s)$ , tales que los rellenos coincidan con  $F$  en los elementos del conjunto  $I(F)$ , es decir  $F = F' \in I(F)$ .

Sea  $s$  un esqueleto de rango  $r$ . Fijemos una sucesión decreciente de números  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots \rightarrow 0$ , definimos la relación de equivalencia por inducción matemática sobre el rango del esqueleto. Antes de proseguir necesitaremos la siguiente notación.

$$\eta = \min_{a \in Y_1^0} \mu_0(\{a\}),$$

y

$$\theta = \max_{a \in Y_1^0} \mu_0(\{a\}).$$

La relación de equivalencia se construye en especial para el conjunto  $\mathcal{F}(s)$ , de manera análoga se puede construir la relación de equivalencia para  $\mathcal{G}(s)$ .

Sea  $s$  un esqueleto, con rango  $\rho(s) = 1$  y longitud  $l = l_1 + l_2 + \dots + l_k$ , el conjunto de índices es  $I(s) = \{1, 2, \dots, k\}$ . Sea  $F = a_1 a_2 \dots a_k \in \mathcal{F}(s)$ , entonces definimos el conjunto  $I(F)$  como:

$$I(F) = \{j : 1 \leq j \leq k, \mu_0(a_1) \cdot \mu_0(a_2) \cdots \mu_0(a_{j-1}) \geq \frac{1}{\eta} \exp[-h_o(1 - \varepsilon_1)l]\}.$$

Si  $\mu_0(a_1) < \frac{1}{\eta} \exp[-h_o(1 - \varepsilon_1)l]$ , entonces definimos  $I(F) = \{1\}$ . Claramente  $I(F) \in I(s)$  y además es de la forma  $\{1, 2, \dots, j_F\}$ , este conjunto  $I(F)$  indica para qué valores de  $j$  la medida  $\prod_{i=1}^j \mu_0(a_i)$  toma sus valores típicos.

Asumamos que la relación de equivalencia esta definida para todo rango menor que  $r$  y para todo relleno  $F \in \mathcal{F}(s)$ . Supongamos que el esqueleto  $s$  tiene rango  $\rho(s) = r$  y que la descomposición de rango es  $s = s_1 \oplus \dots \oplus s_q$ , entonces el relleno  $F$  de  $s$  se puede escribir como  $F = F(s_1) \cdot F(s_2) \cdots F(s_q)$  y describir a  $\overline{I(F)}$  como:

$$\overline{I(F)} = \bigcup_{i=1}^q I(F(s_i)) \subset I(S) = \{1, 2, \dots, k\}.$$

Enseguida atendemos al complemento del conjunto  $(\overline{I(F)})^c = [I(s) \setminus \overline{I(F)}] \subset I(s)$ , este es de la forma  $\{j_1, j_2, \dots, j_d\}$ , se puede suponer que están ordenados de manera creciente, es decir  $j_1 < j_2 < \dots < j_d$ , lo que nos permite definir,

$$I(F) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{I(F)} \cup \{j_u : 1 \leq u \leq d, (\prod_{j \in \overline{I(F)}} \mu_0(a_j)) \times \mu_0(a_{j_1}) \cdot \mu_0(a_{j_2}) \cdots \mu_0(a_{j_{u-1}}) \geq \frac{1}{\eta} \exp[-h_o(1 - \varepsilon_r)l]\}.$$

**Definición 4.5.** Se dice que el relleno  $F$  está relacionado con  $F'$  ( $F \sim F'$ ), si  $I(F) = I(F')$  y las coordenadas de los rellenos  $F$  y  $F'$  coinciden, denotaremos al conjunto de clases de equivalencia como  $\widetilde{\mathcal{F}(s)}$  y a las clases de equivalencia como  $\tilde{F}$ .

En el primer paso ( $r = 1$ ), observaremos a los segmentos de bloques cuya medida  $\mu_0$  cae por debajo de la cota inferior (es decir, nos fijamos en los bloques que toman su valor típico). En el siguiente paso ( $r > 1$ ) usamos la descomposición de rango, la cual existe y es única, esto permite tomar en cuenta ciertos bloques que caen por debajo de la nueva cota inferior, la cual es menor que la cota inferior del paso anterior ( $\overline{I(F)}$ ). En este paso añadiremos todos los bloques que caen por debajo de esa nueva cota inferior. Una observación, si  $s$  y  $s'$  son esqueletos distintos pero con la misma longitud, se tiene que  $\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s')$ , sin embargo sus clases de equivalencia pueden diferir. Lo anterior permite definir otra relación de equivalencia, además de la relación de equivalencia definida previamente. A continuación definimos la nueva relación de equivalencia:

**Definición 4.6.** Se dice que el relleno  $F$  está relacionado con  $F'$ ,  $F \leftrightarrow F'$ , si  $\overline{I(F)} = \overline{I(F')}$  y las coordenadas de los rellenos  $F$  y  $F'$  coinciden, denotaremos al conjunto de clases de equivalencia como  $\overline{\mathcal{F}(s)}$  y a las clases de equivalencia como  $\overline{F}$ .

Para comprender como están constituidas las clases de equivalencia, enunciamos el siguiente lema:

**Lema 4.5** (Lema de los rellenos). 1. Supongase que  $r$ , número natural arbitrario y  $l \in \mathbb{N}$  satisfacen,

$$\frac{1}{\eta} \exp[-h_o(1 - \varepsilon_1)l] < 1,$$

si  $\rho(s) = r$ ,  $l(s) = l$  y  $F \in \mathcal{F}(s)$ , entonces  $\mu_0(\tilde{F}) \geq \exp[-h_o(1 - \varepsilon_r)l]$ .

2. Para cualquier  $\delta > 0$  y  $r \in \mathbb{N}$  podemos encontrar  $l_1 = l_1(\delta, r)$ , tal que, si el esqueleto  $s$  de rango  $\rho(s) = r$  satisface que  $l(s) = l \geq l_1$ , entonces para toda  $F \in \mathcal{F}(s)$ , excepto para un cierto conjunto de rellenos de  $\mu_0$ -medida menor que  $\delta$  se tiene:

$$\mu_0(\tilde{F}) \leq \frac{1}{\eta} \exp[-h_o(1 - \varepsilon_r)l]. \tag{7}$$

3. Para cualquier  $\delta > 0$  y para cualquier  $r$  es posible encontrar  $l_2 = l_2(\delta, r)$ , tal que, si el esqueleto  $s$  de rango  $\rho(s) = r$  satisface que  $l(s) = l \geq l_2$ , entonces, para toda  $F \in \mathcal{F}(s)$ , excepto para un cierto conjunto de rellenos de  $\mu_0$ -medida menor que  $\delta$  se tiene:

$$\frac{\text{card } I(F)}{l} \geq 1 - \frac{2h_o}{|\log(\theta)|} \varepsilon_r.$$



1. *Demostración.* Por inducción sobre el rango  $r$  del esqueleto  $s$ , supongamos  $\rho(s) = 1$  y  $I(F) = \{1, 2, \dots, d\}$ , calculamos la medida de la clase de equivalencia de  $F$ , es decir

$$\begin{aligned} \mu_0(\tilde{F}) &= \prod_{k=1}^d \mu_0(a_k) \\ &= \prod_{k=1}^{d-1} \mu_0(a_k) \cdot \frac{\mu_0(a_d)}{\eta} \cdot \eta \\ &\geq \frac{\exp[-h_o(1 - \varepsilon_1)l]}{\eta} \cdot \eta. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que  $r > 1$  y asumamos que el lema es verdadero para los rangos menores que  $r$ . Consideremos la partición de rango  $s = s_1 \oplus \dots \oplus s_q$ ,  $l(s_i) = l_i$   $1 \leq i \leq q$ , entonces podemos ver al relleno  $F$  como  $F = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ , si  $I(F) = \cup_{i=1}^q I(f_i)$  esto implica,

$$\begin{aligned} \mu_0(\tilde{F}) &= \prod_{i=1}^q \mu_0(\tilde{F}_i) \\ &\geq \prod_{i=1}^q \exp[-h_o(1 - \varepsilon_{r-1})l_i] \\ &= \exp[-h_o(1 - \varepsilon_{r-1})l] \\ &\geq \exp[-h_o(1 - \varepsilon_r)l]. \end{aligned}$$

La primera desigualdad es por la hipótesis de inducción, la última se debe a que la sucesión de  $\varepsilon_i$  es decreciente, la sucesión tiende a cero cuando  $i$  tiende a infinito.

En el caso  $I(F) \neq \cup_{i=1}^q I(f_i)$  y  $j_d$  sea un elemento maximal en  $I(F) \setminus \cup_{i=1}^q I(f_i) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mu_0(\tilde{F}) &= \left[ \prod_{i \in I(F)} \mu_0(a_i) \right] \times \mu_0(a_{i_1}) \cdot \mu_0(a_{i_2}) \cdots \mu_0(a_{i_d}) \\ &\geq \frac{\mu_0(a_{i_d})}{\eta} \exp[-h_o(1 - \varepsilon_r)l] \\ &\geq \exp[-h_o(1 - \varepsilon_r)l], \end{aligned}$$

la primera desigualdad se debe a la definición de  $I(F)$  y la segunda desigualdad es debido a que suponemos que  $j_d$  es un elemento maximal en  $I(F) \setminus \cup_{i=1}^q I(f_i)$ .  $\square$

2. *Demostración.* Denotemos  $F'(s) = \{F \in \mathcal{F}(s) : \text{card}[I(F)] = l(s)\}$ . Si  $F \notin F'(s)$ , es decir  $\text{card}[I(F)] < l(s)$ , entonces, por la definición de  $I(F)$  se tiene:

$$\mu_0(\tilde{F}) \leq \frac{1}{\eta} \exp[-h_o(1 - \varepsilon_r)l].$$

En caso contrario,  $F \in F'(s)$ , y  $\tilde{F} = F$ , basta estimar la medida del siguiente conjunto para  $l(s)$  lo suficientemente grande:

$$\{F \in \mathcal{F}(s) : \mu_0(F) > \frac{1}{\eta} \exp[-h_o(1 - \varepsilon_r)l]\}.$$

Aplicando el corolario (3.8) del teorema de Shanon-Macmillan-Breimann, es posible encontrar un  $l_1 = l_1(\delta, r)$  tal que para  $l \geq l_1$  la medida  $\mu_0$  de este conjunto sea menor que  $\delta$ .  $\square$

3. *Demostración.* Sean  $F \in \mathcal{F}(s)$ ,  $l(s) \geq l_1(\delta/2, r)$ , se satisface la desigualdad (7) para  $F$  y por el lema (4.3) de los esqueletos, se tiene que la medida  $\mu_0$  de todos estos rellenos  $F$  no es menor que  $1 - \delta/2$ . Si además se tiene que:

$$\frac{\text{card } I(F)}{l} < 1 - \frac{2h_o}{|\log(\theta)|} \varepsilon_r.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mu_0(F) &= \left( \prod_{i \in I(F)} \mu_0(i) \right) \left( \prod_{i \in I(S) \setminus I(F)} \mu_0(i) \right) \\ &\leq \mu_0(\bar{F}) \cdot \theta^{(2h_o/|\log \theta|)\varepsilon_r l} \\ &\leq \frac{1}{\eta} \exp[-h_o(1 - \varepsilon_r)l] \cdot \exp(-2h_o\varepsilon_r l) \\ &= \frac{1}{\eta} \exp[-h_o(1 + \varepsilon_r)l], \end{aligned}$$

por el corolario (3.8) podemos encontrar  $l_2 \geq l_1(\delta/2, r)$ , tal que,  $l \geq l_2$  implique que la medida total de todos los  $F$  que satisfacen la última desigualdad sea menor que  $\delta/2$ .  $\square$

#### 4.2.2. Determinando la sucesión $\{N_r\}$

Para determinar la sucesión  $\{N_r\}$ , recordemos que contamos dos alfabetos  $Y_1$  y  $Y_2$ . Por el lema anterior, para cada alfabeto se cuenta con los números  $l_1(\delta, r)$  y  $l_2(\delta, r)$  y para evitar confusión, para el alfabeto  $Y_1$  vamos a denotar por  $l_1^{(1)}, l_2^{(1)}$  a  $l_1(\delta, r)$  y  $l_2(\delta, r)$ . De manera análoga para el alfabeto  $Y_2$  denotaremos por  $l_1^{(2)}, l_2^{(2)}$  a  $l_1(\delta, r)$  y  $l_2(\delta, r)$ . Estos números dependen de la sucesión  $\{\varepsilon_r\}$ , pero no dependen de  $\{N_r\}$ . Supongamos que para estos cuatro números se cumple la desigualdad.

$$\frac{1}{\eta} \exp[-h_o(1 - \varepsilon_1)l_i^{(j)}] < 1 \quad i, j = 1, 2.$$

Ahora escojamos una sucesión de  $\delta_r$ , tal que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \delta_r = 0$ , y para cada  $r$ , escojamos  $L_r \geq \max\{l_i^{(j)} : i, j = 1, 2\}$ , de tal manera que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} L_r(\varepsilon_{r-1} - \varepsilon_r) = \infty,$$

usando la sucesión  $\{L_r\}$ , se escoge  $N_r$  de acuerdo con el lema (4.3) de los esqueletos.

#### 4.3. Sociedades y el lema del matrimonio.

En el caso de que  $r$  sea par, asociaremos a la clase de equivalencia  $\tilde{F}$  del esqueleto  $s$  de rango  $r$  en la fibra de  $X_1$ , un conjunto de posibles socios que denominaremos como la clase de equivalencia de todos los posibles rellenos de rango  $r$  en  $X_2$ . Por medio del siguiente mapeo:

$$\phi : \widetilde{\mathcal{F}(s)} \longrightarrow 2^{\widetilde{\mathcal{G}(s)}}.$$

Este último es llamado una sociedad. En el caso cuando  $r$  es impar, se hace la misma operación pero con los roles de  $X_1$  y  $X_2$  intercambiados, es decir

$$\phi : \widetilde{\mathcal{G}}(s) \longrightarrow 2^{\widetilde{\mathcal{F}}(s)}.$$

Es importante mencionar que en cada paso las asociaciones realizadas son consistentes con las realizadas en los pasos anteriores, esto es posible debido a la construcción de la sociedad dual, la cual hace posible ir del paso  $r$  al  $r + 1$ . El conjunto de posibles socios tiende a disminuir conforme se van refinando las sociedades por medio del lema del matrimonio.

A continuación daremos las definiciones y algunas propiedades sobre las sociedades y el lema del matrimonio. Estas definiciones y propiedades se dan de manera general y serán de gran ayuda para definir el isomorfismo.

**Definición 4.7.** Sean  $(U, \rho)$  y  $(V, \sigma)$ , espacios de probabilidad con  $\rho, \sigma$ , las medidas correspondientes. Definimos una sociedad  $\gamma$  de  $U$  a  $V$  y la denotamos como  $\gamma : U \rightsquigarrow V$ , como el mapeo

$$\gamma : U \longrightarrow 2^V,$$

tal que:

$$\rho(B) \leq \sigma(\gamma(B)), \quad \forall B \subset U.$$

En el caso del lema del matrimonio usual las medidas  $\rho$  y  $\sigma$  son medidas de conteo.

**Definición 4.8.** Decimos que una sociedad  $\delta : U \rightsquigarrow V$  es un refinamiento de la sociedad  $\gamma : U \rightsquigarrow V$ , denotado por  $\delta < \gamma$ . Si para todo  $b \in U \Rightarrow \delta(b) \subset \gamma(b)$ .

**Definición 4.9.** El número de promiscuidad  $\pi(\gamma)$  de una sociedad, se define como:

$$\pi(\gamma) = \text{card}\{g \in V : \exists b_1 \neq b_2 \in U \text{ tales que } g \in \gamma(b_1) \cap \gamma(b_2)\}.$$

**Definición 4.10.** Definimos el dual de la sociedad  $\gamma : U \rightsquigarrow V$ , como la función  $\gamma^* : V \rightarrow 2^U$ , definida como:

$$\gamma^*(g) = \{b \in U : g \in \gamma(b)\}.$$

**Lema 4.6.** La función dual  $\gamma^*$  define una sociedad de  $V$  a  $U$ .

*Demostración.* Sea  $G \subset V$ , fijémonos en el complemento de  $\gamma^*(G)$ , el complemento de este conjunto está contenido en  $U$ , lo que implica:

$$\gamma[(\gamma^*(G))^c] \subset G^c,$$

entonces:

$$\begin{aligned} \sigma(G) &= 1 - \sigma(G^c) \\ &\leq 1 - \sigma(\gamma[(\gamma^*(G))^c]) \\ &\leq 1 - \rho[(\gamma^*(G))^c] \\ &= \rho(\gamma^*(G)). \end{aligned}$$

Una manera sencilla de generar sociedades es “unir” dos medidas de probabilidad  $\rho$  y  $\sigma$ , es decir formar la medida de probabilidad  $\lambda$  en  $U \times V$  la cual se puede proyectar a  $\rho$  y  $\sigma$ , es decir:

$$\sum_{b \in U} \lambda(b, g) = \sigma(g), \quad \sum_{g \in V} \lambda(b, g) = \rho(b), \quad \forall b, g.$$

Podemos definir la sociedad  $\gamma = \gamma_\lambda : U \rightsquigarrow V$  como  $g \in \gamma(b) \Leftrightarrow \lambda(b, g) > 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \sigma(\gamma(B)) &= \sum_{g \in \gamma(B)} \sigma(g) \\ &= \sum_{g \in \gamma(B)} \sum_{b \in U} \lambda(b, g) \\ &\geq \sum_{b \in B} \sum_{g \in \gamma(b)} \lambda(b, g) \\ &\geq \sum_{b \in B} \sum_{g \in V} \lambda(b, g) \\ &= \sum_{b \in B} \rho(b) \\ &= \rho(B), \end{aligned}$$

lo que implica que  $\gamma$  sea en realidad una sociedad. Es importante mencionar que no todas las sociedades están definidas de esta forma, no obstante existe el siguiente lema.

**Lema 4.7.** Toda sociedad tiene un refinamiento que esta generado por una “unión”.

**Lema 4.8** (Lema del matrimonio). Dada una sociedad  $\gamma : U \rightsquigarrow V$ , existe un refinamiento  $\delta$ ,  $\delta < \gamma$ , tal que  $\pi(\delta) < \text{card } U$ .

Las demostraciones de estos lemas se pueden ver en [5, 10].

**Lema 4.9.** Sean  $\gamma_i : (U_i, \rho_i) \rightsquigarrow (V_i, \sigma_i)$ , sociedades con  $i = 1, 2$ . Entonces la función producto  $\gamma(b_1, b_2) = \gamma_1(b_1) \times \gamma_2(b_2)$  es una sociedad de  $U_1 \times U_2$  a  $V_1 \times V_2$ .

*Demostración.* La demostración es inmediata a partir del hecho que cada sociedad tiene un refinamiento generado por una “unión”, entonces, a partir de ese refinamiento generamos la partición deseada [5, 10].  $\square$

## 4.4. Construcción del isomorfismo

### 4.4.1. Asignaciones

En esta sección construiremos una serie de asignaciones, por el método de inducción matemática, sobre el rango del esqueleto  $s$ . En la sección anterior definimos las sociedades, las cuales nos servirán

para construir las asignaciones que deseamos. En el caso en el que  $r$  es impar, asociaremos a la clase de equivalencia  $\widetilde{F}$  del esqueleto  $s$  de rango  $r$  en la fibra de  $X_1$ , un conjunto de posibles socios, que denominaremos como la clase de equivalencia de todos los posibles rellenos de rango  $r$  en  $X_2$ . Por medio de la sociedad:

$$\mathcal{R}_s : \widetilde{\mathcal{F}(s)} \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{G}(s)} \text{ Si } r \text{ es impar,}$$

en otro caso,

$$\mathcal{R}_s : \widetilde{\mathcal{G}(s)} \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{F}(s)} \text{ Si } r \text{ es par.}$$

Para  $r = 1$ , la sociedad  $\mathcal{L}_s$  es trivial, es decir:

$$\mathcal{L}_s(\widetilde{F}) = \widetilde{\mathcal{G}(s)} \quad \forall \widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{F}(s)}.$$

Todos los rellenos de  $X_2$  son candidatos para ocupar los lugares de las " $X$ "s. Usando el lema del matrimonio (4.8), escojemos un refinamiento  $\mathcal{R}_s < \mathcal{L}_s$  que sea una sociedad tal que  $\pi(\mathcal{R}_s) < \text{card } \widetilde{\mathcal{F}(s)}$ , notemos que el lema de los rellenos (4.5) implica que  $\text{card } \widetilde{\mathcal{F}(s)} \leq \exp[-h_0(1 - \varepsilon_r)l]$ .

Ahora supongamos un esqueleto  $s$ , de rango par  $r$ , y que la sociedad  $\mathcal{R}_s$  está definida para todos los rangos menores a  $r$ . Nuevamente nos tenemos que fijar en la descomposición de rango de  $s$ , recordemos que esta descomposición es única y los esqueletos  $s_i$  tienen rango  $r - 1$ . Sea  $s = s_1 \oplus \dots \oplus s_q$ , la descomposición de rango, para cada  $s_i$  nos podemos fijar en las sociedades que ya están definidas.

$$\mathcal{R}_{s_i} : \widetilde{\mathcal{F}(s_i)} \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{G}(s_i)} \quad \forall 1 \leq i \leq q,$$

además nos fijamos en las sociedades duales,

$$\mathcal{R}_{s_i}^* : \widetilde{\mathcal{G}(s_i)} \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{F}(s_i)} \quad \forall 1 \leq i \leq q.$$

Como vimos en el lema (4.9) de la sección anterior, el producto de sociedades es una sociedad, por lo que podemos fijarnos en:

$$\mathcal{L}_s : \widetilde{\mathcal{G}(s_1)} \times \dots \times \widetilde{\mathcal{G}(s_q)} \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{F}(s_1)} \times \dots \times \widetilde{\mathcal{F}(s_q)}.$$

Notemos que estamos tomando una sociedad de  $\mathcal{L}_s : \widetilde{\mathcal{G}(s)} \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{F}(s)}$ . Cada elemento de  $\widetilde{\mathcal{F}(s)}$ , es la unión disjunta de clases de equivalencia en  $\widetilde{\mathcal{F}(s)}$ , por lo que podemos pensar en la sociedad  $\mathcal{L}_s$  como una sociedad de  $\mathcal{L}_s : \widetilde{\mathcal{G}(s)} \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{F}(s)}$ .

Nuevamente usaremos el lema del matrimonio para escoger un refinamiento  $\mathcal{R}_s < \mathcal{L}_s$  que sea una sociedad tal que  $\pi(\mathcal{R}_s) < \text{card } \widetilde{\mathcal{G}(s)}$ . Consideremos la sociedad  $\mathcal{R}_s : \widetilde{\mathcal{G}(s)} \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{F}(s)}$ , como una sociedad de  $\widetilde{\mathcal{G}(s)}$  en  $\widetilde{\mathcal{F}(s)}$ , bajo el siguiente supuesto:

$$\mathcal{R}_s(\widetilde{G}) = \mathcal{R}_s(\overline{G}) \text{ para cada relleno } G \in \widetilde{\mathcal{G}(s)}.$$

Este último es un mapeo bien definido ya que cada elemento en  $\widetilde{\mathcal{G}(s)}$  determina uno y solo un elemento en  $\overline{\mathcal{G}(s)}$ , y  $\mathcal{R}_s$  es una sociedad ya que:

$$\nu_0(\widetilde{G}) \leq \nu_0(\overline{G}) \leq \mu_0(\mathcal{R}_s(\overline{G})) = \mu_0(\mathcal{R}_s(\widetilde{G})).$$

En el caso de  $r$  impar, se realiza una construcción similar. La sociedad está dada por:

$$\mathcal{R}_s = \begin{cases} \overline{\mathcal{G}(s)} \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{F}(s)}, & \text{si } r \text{ es par,} \\ \mathcal{F}(s) \rightsquigarrow \overline{\mathcal{G}(s)}, & \text{si } r \text{ es impar.} \end{cases}$$

**Lema 4.10** (Lema de las asignaciones). Para casi toda  $\{x\} \in X_1$  con  $x_0 \neq 0$  existe un  $r = r(x)$ , tal que.

1. Con respecto a la sociedad

$$\mathcal{R}_{s_r(x)} : \overline{\mathcal{G}(s_r(x))} \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{F}(s_r(x))},$$

$\mathcal{R}_{s_r(x)}^{-1}(\widetilde{\mathcal{F}(s_r(x))})$  consta de un solo elemento,  $\overline{\mathcal{G}(s_r(x))}$ .

2. Para el conjunto de índices  $I_r(x)$  del esqueleto  $s$  de rango  $r$  y relleno  $F$  se tiene que:

$$I_r(x) \in \overline{I(\overline{\mathcal{G}(s_r(x))})}.$$

1. *Demostración.* Fijemos un elemento  $z \in X'_1(p_0, 1 - p_0)$ , este último define los esqueletos  $s_r$ , para toda  $r$ . Por el lema de los esqueletos (4.3) tenemos que estos cumplen con  $l = l_r = l(s_r) \geq L_r$ . A continuación definimos los conjuntos,

$$E_r = \{F \in X_1^0 : \text{card } \mathcal{R}_{s_r(x)}^{-1}(\widetilde{\mathcal{F}(z, F)}) > 1\}.$$

El lema del matrimonio (4.8) nos asegura que para los  $\widetilde{\mathcal{F}}$  tales que  $\text{card } \mathcal{R}_{s_r(x)}^{-1}(\widetilde{\mathcal{F}}) > 1$ ,  $\text{card } \widetilde{\mathcal{F}}$  es menor que  $\text{card } \overline{\mathcal{G}}$ . Ahora, de acuerdo al lema de los rellenos (4.5),  $\widetilde{\mathcal{F}}$  debe tener medida menor a  $\frac{1}{\eta} \exp[-h_o(1 - \varepsilon_r)l]$ .

$$\mu_0(E_r) \leq \exp[-h_o(1 - \varepsilon_r)l] \text{card } \overline{\mathcal{G}} + \varepsilon_r. \quad (8)$$

Fijémonos enseguida en la descomposición de rango de  $s_r$ . Para cada  $\widetilde{G}_i \in \widetilde{\mathcal{G}(s_i)}$ , usando la primera parte del lema de los rellenos (4.5) se tiene:

$$\nu_0(\widetilde{G}_i) \geq \exp[-h_o(1 - \varepsilon_{r-1})l_i],$$

así :

$$\text{card } \widetilde{\mathcal{G}(s_i)} \leq \exp[-h_o(1 - \varepsilon_{r-1})l_i],$$

lo cual implica:

$$\text{card } \overline{\mathcal{G}(s_r)} = \prod_i \text{card } \widetilde{\mathcal{G}(s_i)} \leq \exp[-h_o(1 - \varepsilon_{r-1})l].$$

Entonces, para una  $r$  lo suficientemente grande se tiene que de la ecuación (8) obtenemos.

$$\begin{aligned} \mu_0(E_r) &\leq \exp[-h_o(1 - \varepsilon_r)l] \text{card } \overline{\mathcal{G}} + \varepsilon_r \\ &\leq \exp[-h_o(1 - \varepsilon_r)l] \exp[-h_o(1 - \varepsilon_{r-1})l] + \varepsilon_r \\ &\leq \exp[-h_o(\varepsilon_{r-1} - \varepsilon_r)l] + \varepsilon_r \\ &\leq \exp[-h_o(\varepsilon_{r-1} - \varepsilon_r)L_r] + \varepsilon_r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

notemos que los conjuntos  $E_r$  decrecen conforme  $r$  se incrementa, lo que implica:

$$\mu \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = 0.$$

□

2. *Demostración.* Para esta demostración haremos uso del lema de los rellenos (4.5). Fijemos un punto  $z \in X'_1(p_0, 1 - p_0)$ . Ahora consideremos todos los puntos  $\{x\} \in X_1$  para los cuales  $\{x\} = (z, F)$ , donde  $F$  es el relleno sobre la fibra de  $z$  en  $X_1$ . Este conjunto de puntos lo podemos dividir en  $l_r$  conjuntos de igual medida ( $1/l_r$ ), según donde esté localizada la coordenada cero. Usando la descomposición de rango del esqueleto  $s_r$ :

$$\begin{aligned} \mu_0\{F \in \mathcal{F} : I(s_r) \notin \overline{I(\tilde{G})}\} &= 1 - \frac{\text{card } \overline{I(\tilde{G})}}{l_r} \\ &= 1 - \frac{1}{l_r} \sum_{i=1}^q \text{card } I(\tilde{G}(s_i)) \\ &\leq 1 - \frac{1}{l_r} \sum_{i=1}^q (l_i - \frac{2h_o}{|\log(\theta)|} \varepsilon_{r-1} * l_i) \\ &= \frac{2h_o}{|\log(\theta)|} \varepsilon_{r-1}, \end{aligned}$$

como la sucesión de  $\varepsilon_r$  tiende a cero conforme  $r \rightarrow \infty$ , y  $h_0$  es constante al igual que  $\theta$ , se tiene que esta cantidad tiende a cero, por lo que la medida de ese conjunto es cero, pero ese conjunto es el complemento del conjunto de índices. □

Una vez completada esta prueba estamos en condiciones para enunciar el isomorfismo que permite demostrar el teorema de Ornstein.

## 4.5. El isomorfismo

**Definición 4.11.** Se define al isomorfismo  $\Psi$ . Para casi toda  $\{x\} \in X_1$  se escoge una  $r$  par y se define:

$$\Psi(\{x\})_0 = \begin{cases} 0, & \text{si } x_0 = 0, \\ \text{la } I_r(x)\text{-ésima entrada de } \overline{G_r(x)}, & \text{si } x_0 \neq 0. \end{cases}$$

Las siguientes etapas están determinadas a partir de las sociedades duales y los refinamientos por lo que  $\Psi$  es independiente de  $r$ , la definición para todas las entradas es:

$$\Psi(\{x\})_j = \begin{cases} 0, & \text{si } x_j = 0, \\ \text{la } (I_r(x) + j)\text{-ésima entrada de } \overline{G_r(x)}, & \text{si } x_j \neq 0. \end{cases}$$

Usando  $r$  impar se obtiene el mapeo inverso, el cual está bien definido y es el inverso de  $\Psi$  ya que la sociedades de uno son las duales del otro, además conmuta con los shifts de Bernoulli correspondientes, puesto que así está definido. Para mostrar que este shift preserva la medida solo tenemos que fijarnos en los esqueletos, los cuales nos generan una partición del espacio y es posible aproximar cualquier conjunto medible en el espacio por medio de una sucesión de esqueletos, y como para los esqueletos nuevamente tenemos sociedades, y estas preservan la medida, resulta en que el shift preserva la medida.

## 5. Conclusiones

Luego de seguir todo este extenso camino podemos establecer una serie de puntos que ayudará entender mejor como este trabajo da una aproximación sencilla al teorema de Ornstein.

En primer lugar es necesario tener cuidado con la medida de los espacios, ya que si la medida no es finita se volverá imposible hacer la transición a espacios de probabilidad.

Si tomamos en cuenta que la mayoría de estos espacios de medida se comportan como alfabetos de  $k$  letras y la  $\sigma$ -álgebra como el conjunto de todas las palabras posibles, entonces el concepto es mucho más digerible para aquellos que no están familiarizados con el teorema original.

Para continuar con la explicación debemos recordar que si un espacio es medible entonces cuenta con una transformación inversa y dicha inversa preserva la medida a menos que esta sea igual a cero. La transformación que utilizamos para este medio fue el shift de Bernoulli que sabemos cuenta con una inversa existente.

Sabiendo que la transformación tiene una inversa, entonces es posible introducir el concepto de ergodicidad, y una vez que establecemos que nuestra transformación shift es ergódica es posible obtener propiedades de ergodicidad. El paso siguiente del camino seguido es llegar a que los shifts son isomorfos. Para eso es necesario observar bajo que condiciones existe algún invariante, en este caso será la entropía y solo nos será de utilidad cuando esta sea diferente de cero.

Previamente demostramos que los shifts no tienen entropía cero por lo que solo es necesario mostrar que estos comparten la misma entropía, independientemente de si son a la izquierda o a la derecha.

Como vimos anteriormente es incomodo calcular la entropía de manera directa, por lo que es necesario recurrir a herramientas sencillas que lleven a las conclusiones originales de Ornstein por caminos diferentes, este es el caso de los esqueletos y rellenos que hemos definido para desarrollar nuestra demostración.

Al introducir el concepto de rellenos es posible utilizarlos para generar clases de equivalencia que ayuden a relacionar ambos shifts entre si, relación que logramos concretar al refinar las clases de equivalencia por medio del lema del matrimonio, lo cual relaciona las sociedades necesarias usando las medidas de probabilidad que definimos al principio.

Por último, utilizamos las asignaciones de relaciones para llegar a la conclusión equivalente al teorema de Ornstein, los conjuntos isomorfos tienen la misma entropía.



## Agradecimientos

*J.L.H-A.* agradece el apoyo recibido de **CONACYT, PRODEP, Facultad de Ingeniería-UACH y UACH-ESDEPED-2022, Ciencias Básicas-ITCH.** *J.R.C.J.* agradece a **CONACYT** por la beca de estudios de Maestría Num.765330. *C.A.H* agradece el apoyo de **CONACYT, Facultad de Ingeniería-UACH, PRODEP y UACH-ESDEPED-2022.** *O.R.H.G* agradece el apoyo recibido de **CONACYT, Facultad de Ingeniería-UACH**

## Referencias

- [1] W. Rudin, *Introduction to Real and Complex Analysis*. Limusa-Wiley, 1974.
- [2] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer-Verlag, 1981.
- [3] J. C. Burkill, "Henri Lebesgue, 1875 - 1941," *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society*, vol. 4, no. 13, pp. 483-490, 1944.
- [4] R. Mañé, *Teoría Ergódica*. Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.
- [5] I. Cornfeld, S. Fomin, and Y. Sinai, *Ergodic Theory*. Springer-Verlag, 1982.
- [6] G. D. Birkhoff, "Proof of the Ergodic Theorem," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1931.
- [7] A. Guillot and R. Iturriaga, "Entropía," Master's thesis, Facultad de Ciencias, UNAM, 1997.
- [8] D. S. Ornstein and B. Weiss, "Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups," *Journal d'Analyse Mathématique*, vol. 48, pp. 1-141, 1987.
- [9] M. Keane and M. Smorodinsky, "Bernoulli shifts of the same entropy are finitarily isomorphic," *Annals of Math.*, vol. 109, pp. 397-406, 1979.
- [10] K. Petersen, *Introduction to Ergodic Theory*. Cambridge University Press, 1993.
- [11] D. W. Stroock, *Probability Theory, an Analytic View*. Cambridge University Press, 1994.



## Delimitación de Áreas Prioritarias de Recarga para el Acuífero Meoqui – Delicias

Miguel Ángel Méndez Alvarado<sup>1</sup>, Jorge Luis Gómez Sánchez<sup>2</sup>, Humberto Silva Hidalgo<sup>3</sup>, Adán Pinales Munguía<sup>4</sup>.

<sup>1</sup>Profesor investigador, Universidad Autónoma de Chihuahua, correo: mimendez@uach.mx

<sup>2</sup>Exalumno, Universidad Autónoma de Chihuahua, correo: jorgegomezsanc29@gmail.com

<sup>3</sup>Profesor investigador, Universidad Autónoma de Chihuahua, correo: hsilva@uach.mx

<sup>4</sup>Profesor investigador, Universidad Autónoma de Chihuahua, correo: apinales@uach.mx

### Resumen

El acuífero Meoqui-Delicias se localiza en la región centro-sur del estado de Chihuahua. La población y actividades de esta zona, dependen casi en su totalidad del agua subterránea. La relación de recuperación respecto a la extracción de este recurso es muy baja. El objetivo de este estudio es determinar las áreas prioritarias de recarga (APR) que permitan definir en un mapa zonas importantes para un mejor manejo y conservación. Para delimitar las APR se analizaron y ponderaron cinco componentes en una plataforma GIS (Sistemas de Información Geográfica, por sus siglas en inglés), cuya relación presenta una influencia hidrogeológica importante para la recarga de acuíferos. Los componentes evaluados fueron: geología, uso de suelo y cobertura vegetal, fallas y fracturas geológicas, pendiente del terreno y densidad de drenaje. Se obtuvo un mapa de APR con cinco clases y su capacidad de recarga. Los resultados indican que el 2% del área de estudio presenta una capacidad excelente y corresponde al pie de monte. En cambio, la capacidad nula para la recarga se localizó en el 16% de la superficie del acuífero. Para el caso de las categorías buena, moderada y baja se encontraron 9%, 44%, 30% respectivamente. Destaca que cerca de la mitad del área de estudio presenta una capacidad moderada, pero a su vez en la que mayor índice de riego presenta debido a sus actividades productivas.

**Palabras clave:** Recarga, GIS, Hidrogeología, Meoqui-Delicias,

## 1. Introducción

El agua subterránea es elemental para el desarrollo de la población que habita en zonas desérticas. La explotación de los sistemas acuíferos ha sido un tema importante en las últimas décadas debido a las tasas de extracción vs recarga. Para este estudio se seleccionó el acuífero Meoqui-Delicias el cual se localiza en la región centro-sur del estado de Chihuahua en México (Figura 1). Geológicamente se encuentra, en mayor medida, dentro de valles formados con depósitos aluviales. Éstos, debido a su porosidad tienen un gran potencial para albergar agua subterránea (CONAGUA, 2018).

El objetivo general fue elaborar un mapa de Áreas Prioritarias de Recarga (APR) mediante un análisis espacial ponderado de cinco componentes que permita delimitar las zonas con mayor potencial de recarga natural. Las condiciones geográficas del área de estudio hacen que, debido a la aridez del terreno y la poca precipitación, se recurra a grandes cantidades de extracción de agua subterránea para diversos usos como doméstico, industrial, ganadero y agrícola. Para cubrir los objetivos de este estudio se tomaron en cuenta cinco componentes: el uso de suelo y vegetación, la geología y estructuras geológicas (fallas y fracturas), la densidad de drenaje y la pendiente del terreno los cuales fueron analizados y procesados en un Sistema de Información Geográfica (GIS, por sus siglas en inglés).

En la actualidad el uso de GIS es de gran ayuda para el procesamiento geoespacial en grandes extensiones. Con el apoyo del programa y un minucioso geoprocesamiento se generaron mapas base y posteriormente un mapa final con las APR para todo el acuífero cuyas capacidades de recarga se representaron de “nula” a “excelente”. A partir de estas condiciones y su representación espacial, tomadores de decisiones, academia incluso organizaciones de la sociedad civil pueden incidir en una mejor administración y conservación del recurso hídrico.

## 2. Metodología

La metodología para determinar las APR del acuífero Meoqui-Delicias es una técnica de Shaban et al. (2004), la cual fue citada y modificada por Yeh et al. (2015) y consta de cuatro fases. La primera es la recopilación y el procesamiento espacial (georreferenciación) de los datos de la zona. Los principales datos o insumos fueron obtenidos del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). Lo relativo a la geología se obtuvo de cartas y sitios web del Servicio Geológico Mexicano (SGM). Respecto a temas hidrológicos la base principal fueron las páginas de la Comisión Nacional del Agua (CONAGUA) y el Simulador de Flujos de Agua de Cuencas Hidrográficas (SIATL).

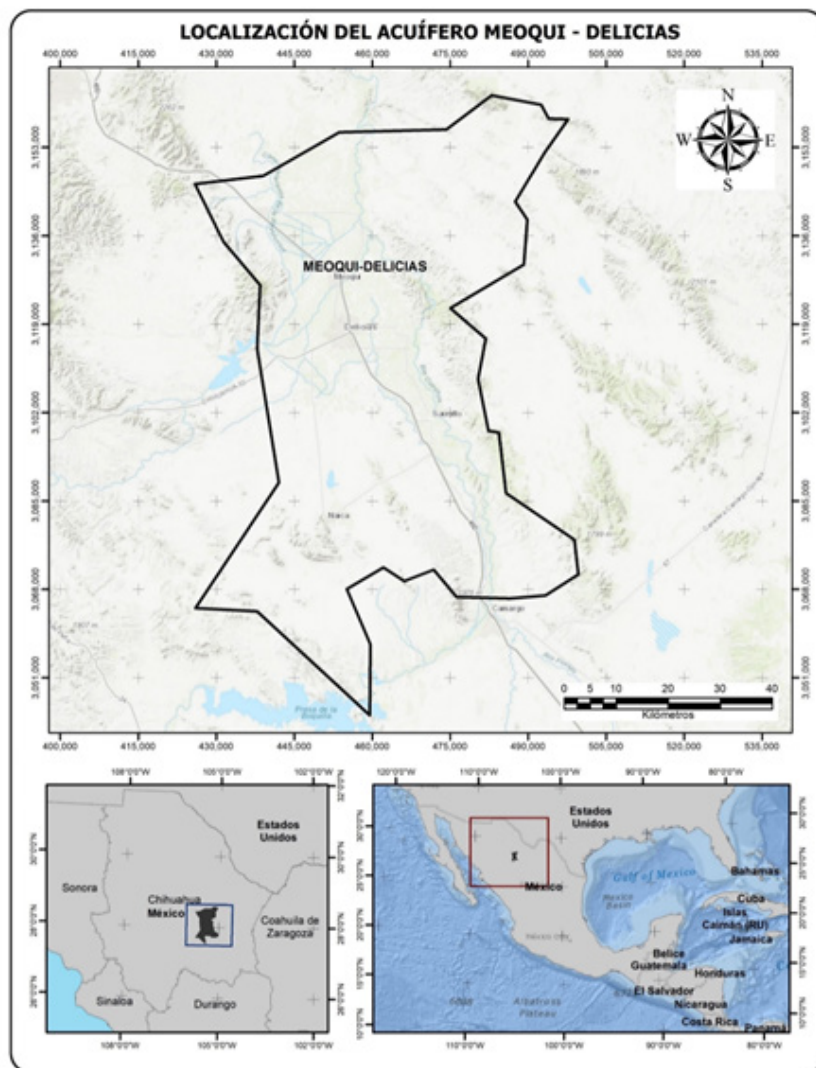


Figura 1. Mapa de localización el acuífero Meoqui-Delicias. Fuente: elaboración propia a partir de insumos del INEGI.

La segunda fase consistió en el análisis de las características de los componentes (capas) a tomar en cuenta por estar relacionadas de forma directa con la recarga en el acuífero (Yeh et al., 2015). Los componentes utilizados fueron: 1) Geología, 2) Uso de suelo y vegetación, 3) Estructuras geológicas, 4) Densidad de drenaje y 5) Pendiente del terreno. Entre los procesos geoespaciales realizados para estas capas destaca: proyección a un sistema de coordenadas unificado; la ubicación e intersección con los límites del acuífero, así como la depuración de la capa.

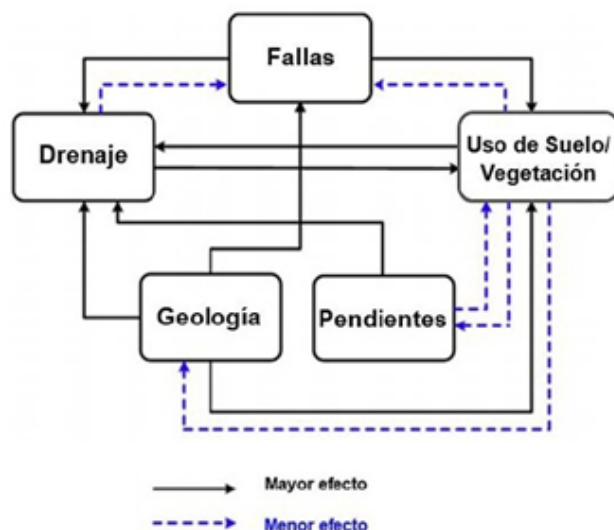
En tercer lugar, se generó un mapa base para cada uno de los componentes y posteriormente se convirtieron a formato ráster y finalmente éstos se reclasificaron con un peso de potencial de recarga. Este peso ponderado corresponde al valor del producto del peso inicial multiplicado por la tasa de influencia (Figura 2). El factor –o tasa– de influencia fue propuesto por Shaban et al. (2004) y modificado por Yeh et al. (2015) y corresponde a un valor interactivo de influencia entre los mismos componentes. Para los elementos de mayor efecto se consideró un valor unitario y acumulado dependiendo la influencia sobre otros, mientras que aquellos de menor efecto el valor correspondió solamente la mitad. A partir del producto entre la influencia por el peso inicial, los mapas base se reclasificaron como potencial de recarga (Tabla 1) al formato ráster. Una de las ventajas de utilizar archivos tipo ráster es que con base en sus características de almacenamiento de datos en celdas cuadradas facilita el análisis espacial en grandes extensiones (ESRI, 2013).

**Tabla 1. Tabla de ponderación para cada capa**

Componente	Categoría	Valor inicial (1 – 10)	Factor de influencia	Potencial de recarga
Capa organizada.	1	10	X	10X
	2	8		8X
	3	6		6X
	...	...		...
	n	1		X

## 2.1. Geología

Los tipos de rocas influyen en la ocurrencia y distribución de la recarga de agua subterránea dentro de una región particular a través de sus propiedades mecánicas y físicas, según afirma Shaban et al. (2004) citado por Mishra (2019). Las rocas en el área del acuífero Meoqui-Delicias pueden agruparse en tres unidades hidrogeológicas: la primera asociada a los rellenos, la segunda a las vulcanitas y la tercera a las calizas de la formación Aurora.



**Figura 2. Relación del factor de influencia relativa de los componentes que intervienen en la recarga de agua (Fuente: Yeh et al., 2015).**

De acuerdo a la clasificación geológica del SGM y los grupos de litología para el área de estudio se consideró que: 1) los depósitos aluviales y depósitos de pie de monte, andesitas basálticas, basaltos y las calizas de la formación Aurora corresponden a materiales de permeabilidad alta; 2) los materiales de permeabilidad media son los conglomerados, gravas, arenas y calizas lacustres además de tobas riolíticas y riolitas; 3) en cambio los materiales de permeabilidad baja se encontraron rocas del Paleozoico, Jurásico y formaciones Las Vegas y Cuchillo, alternancia de lutitas y areniscas calcáreas del Cretácico Superior, tobas riolíticas y conglomerados rojos continentales.

A partir de esta descripción se determinaron grupos adecuados y se asignaron valores iniciales de potencial de recarga.

## 2.2. Uso de suelo y vegetación

La cobertura vegetal y el uso de suelo existentes en la zona son algunos de los factores que afectan la capacidad de infiltración del agua y, por tanto, la recarga de un acuífero (Aparicio, 1992). En áreas con cobertura vegetal saludable o de parcelas agrícolas el escurrimiento superficial se reduce hasta en un 35% del volumen precipitado, abonando esto al proceso de infiltración, recarga y mejora de la calidad del agua (Méndez, 2020).

Los datos para este apartado fueron consultados y geoprocesados del INEGI. Se agruparon las diferentes coberturas de vegetación y los principales usos de suelo. Destacan la ubicación de zonas agrícolas y pastizales en su mayoría mientras que los bosques representan una minoría. Estos datos se han convertido en un insumo de gran importancia en la realización de diversos estudios, como el que se presenta para el acuífero Meoqui-Delicias (INEGI, 2017).

## 2.3. Fallas y fracturas

Las fracturas son discontinuidades en las rocas o superficies en las que éstas han perdido cohesión de partículas. Pueden observarse en cualquier afloramiento y en cualquier tipo de roca. Cuando se

presentan desplazamientos a lo largo del plano de fractura, es decir, si la roca de un lado de la discontinuidad se desplaza con respecto a la del otro lado, toman el nombre de fallas (Rubilar, 1999).

La zona del acuífero Meoqui-Delicias contiene sierras plegadas y falladas de manera dispersa, las cuales están separadas por grandes llanuras de depósitos aluviales con orientación NW-SE (CONAGUA, 2018). Para procesar de mejor manera la información que arroja un mapa de fallas y fracturas es necesario utilizar la Densidad de fallas (Line density) que se define como la longitud de falla por unidad de área. Ésta se calcula con la siguiente ecuación:

$$L_d = \frac{\sum_{i=1}^n L_i}{A} \quad (1)$$

Donde:  $\sum_{i=1}^n L_i$  es la longitud total de fallas (km) y A es la unidad de área (km<sup>2</sup>). Por tanto, la Densidad de fallas se da en km•km<sup>-2</sup> (Yeh, Cheng, Lin, & Lee, 2015). Una Densidad de falla alta indica mayor permeabilidad y porosidad en las rocas, por tanto, más capacidad de recargar acuíferos (Qaddah, 2011).

#### 2.4 Pendiente del terreno

Para determinar este componente se utilizó un modelo digital de elevaciones (MDE). Las pendientes fuertes aumentan la velocidad de los escurrimientos superficiales. Esto disminuye la capacidad de recarga. Por el contrario, las pendientes suaves aumentan el tiempo de contacto agua-suelo, permitiendo al líquido infiltrarse con mayor facilidad (Matus, Faustino, & Jiménez, 2009).

Destaca en la extensión del acuífero valles en la parte central, por lo que no contiene pendientes pronunciadas. Al oeste y este cerca de los límites y parte aguas se encuentran formaciones montañosas, así como al sur del acuífero, cerca del poblado de Naica, municipio de Saucillo.

#### 2.5 Densidad de drenaje

Para determinar este componente, se revisaron y consultaron del SIATL las redes hidrográficas que están por encima del límite del acuífero. Cuanto mayor sea el número de corrientes más recarga se produce (Shaban et al., 2004).

La densidad de drenaje (drainage density) es la longitud total de las corrientes por unidad de área y es calculada con la siguiente ecuación:

$$D_d = \frac{\sum_{i=1}^n L_i}{A} \quad (2)$$

Donde:  $\sum_{i=1}^n Li$  es la longitud total de los escurrimientos (km) y A es la unidad de área (km<sup>2</sup>). Por tanto, la densidad de drenaje se da en km•km<sup>-2</sup> (Yeh et al., 2015).

En la fase final se realizó el análisis geoespacial de las cinco capas mediante el algebra de mapas. Esta herramienta permite el análisis de datos cartográficos digitales mediante la superposición de capas. Para efectos de este estudio los insumos de entrada fueron cada uno de los componentes reclasificados con el potencial de recarga para dar lugar finalmente al mapa de APR.

### 3 Resultados

Se generó un GIS con cinco capas revisadas, catalogadas y reclasificadas con un potencial de recarga. Cada capa contaba con un valor inicial y pesos asignados. Estos valores fueron afectados por una tasa –o factor de influencia– relacionado al efecto dominante entre cada uno de ellos. En la Tabla 2 se muestra un resumen con todos los componentes y las agrupaciones consideradas con base en sus propiedades hidrológicas e hidrogeológicas.

Tabla 2. Tabla de ponderación para cada capa

Componente	Subcategoría	Peso (inicial)	Factor de influencia	Potencial de recarga (peso ponderado)
Geología	Aluvial	10	3.0	30
	Sedimentaria	8	3.0	24
	Metamórfica	5	3.0	15
	Ígneas (Intrusiva/ Extrusiva)	4	3.0	12
Uso de suelo y vegetación	Cuerpo de agua	10	2.5	25
	Bosque	8	2.5	20
	Agrícola	8	2.5	20
	Arbustivo	6	2.5	15
	Herbácea	5	2.5	13
	Suelo desnudo	4	2.5	10
	Urbano	1.2	2.5	3
Fallas y fracturas (km•km <sup>-2</sup> )	1.44 - 2.33	10	2.0	20
	1.04 - 1.43	8	2.0	16
	0.73 - 1.03	6	2.0	12
	0.46 - 0.72	4	2.0	8
	0.17 - 0.45	2	2.0	4
	0.00 - 0.16	0	2.0	0
Pendiente del terreno en grados (°)	0 - 4	10	1.5	15
	5- 12	8	1.5	12
	13 - 23	6.7	1.5	10
	24 - 62	5.3	1.5	8



Componente	Subcategoría	Peso (inicial)	Factor de influencia	Potencial de recarga (peso ponderado)
Densidad de drenaje (km <sup>3</sup> •km <sup>-2</sup> )	3.01 - 5.00	6.7	1.5	10
	2.01 - 3.00	5.3	1.5	8
	1.01 - 2.00	4	1.5	6
	0.01 - 1.00	2	1.5	3
	0.00	0	1.5	0

### 3.1. Geología

De acuerdo con el SGM (2000) en las cartas geológicas se observan para el área de estudio un total de 18 capas estratigráficas. Entre las afloraciones rocosas y suelos consolidados existen andesitas, areniscas, calizas, conglomerados, suelos aluviales y eólicos siendo estos últimos los que abarcan el 55 % del área de estudio. Entre las formaciones rocosas resaltan los tobos, basaltos, granitos, así como zonas volcanosedimentarias. Como se mencionó en el apartado 2.1 y con base en sus propiedades se agruparon en cinco clases, siendo el material aluvial el que presenta mayor porosidad por tanto mayor peso.

El factor de influencia corresponde a la suma de la incidencia que presenta respecto a los otros componentes. Para el caso de la geología, tiene relación con las fallas, el uso de suelo y la densidad de drenaje (Figura 2) por tanto  $3.0 \times 1.0 = 3.0$ . De esta manera se calculó cada factor de influencia para cada componente.

### 3.2. Uso de suelo y vegetación

El resultado de esta capa se obtuvo de la georreferenciación y corte de la Serie VI del INEGI, correspondiente a la cobertura vegetal y uso de suelo escala 1:250,000 para la república mexicana. Se obtuvieron un total de 30 tipos entre los que destacan agricultura, matorral y pastizal, así como agrupaciones entre vegetación secundaria arbustiva. Finalmente, se clasificó en 6 subcategorías de características similares y con base en el peso inicial, afectado por la relación de influencia resultó ser una de las capas con valores de recarga relativamente altos.

### 3.3. Fallas y fracturas

Para determinar este componente se georreferenciaron dos cartas geológico-minero del SGM: Delicias (H13-11) y Camargo (G13-2). Estas cartas contienen información en escala 1:250,000 que para efectos de este estudio y su extensión es aceptable. Las fallas fueron digitalizadas en formato shapefile ya que en esencia por naturaleza la manera de expresar los datos cartográficos en GIS. Los resultados del análisis mostraron 6 categorías en el orden de 0.00 a 2.33 kilómetros divididos por kilómetro cuadrado como se observa en la Tabla 2.

### 3.4. Mapa de pendientes

Para la generación de esta capa se tomó como base el Continuo de Elevaciones Mexicano (CEM 3.0) cuya edición corresponde a una resolución de 15m. por pixel. Cada pixel está representado por una celda cuadrada que almacena al centro de su geometría un valor de X, Y, Z coordenadas utilizadas para un sistema proyectado. Entre las áreas que más destacan son las que presentan de 0-4 y 5-10 grados de pendiente. En estas zonas el escurrimiento es bajo e influenciado por la cobertura vegetal o uso de suelo presentan una gran capacidad de recarga.

### 3.5. Densidad de drenaje

La hidrografía estudiada para este apartado corresponde a la Región Hidrográfica 24 “Bravo – Conchos”, particularmente a la cuenca del R. Conchos - P. El Granero (RH24K) y sobre el acuífero interactúan cuatro redes hidrográficas de las subcuencas: Conchos-Rosetilla (RH24Kb), Tortuguillas y Changlapio (RH24Kg), Pedro Meoqui (RH24Na) y A. Bachimba (RH24Kf). Estos afluentes se componen principalmente por corrientes naturales perennes, intermitentes y por canales utilizados para el riego agrícola.

Cada subcuenca fue clasificada con sus valores iniciales y reclasificada en un ráster con el potencial de recarga como se mostró en la Tabla 2. Destacan valores de acumulación de flujos en el orden de 3-5 km<sup>2</sup>•km<sup>-2</sup>.

### 3.6. Áreas Prioritarias de Recarga

Se generó un GIS con los insumos revisados y reclasificados con el potencial de recarga. Con el uso de álgebra de mapas, se obtuvo un ráster final de APR en el cual se aprecia la extensión total del acuífero clasificada en cinco zonas. Las capacidades de recarga que se obtuvieron son: nula, baja, moderada, buena y excelente, como se aprecia en la Figura 3.

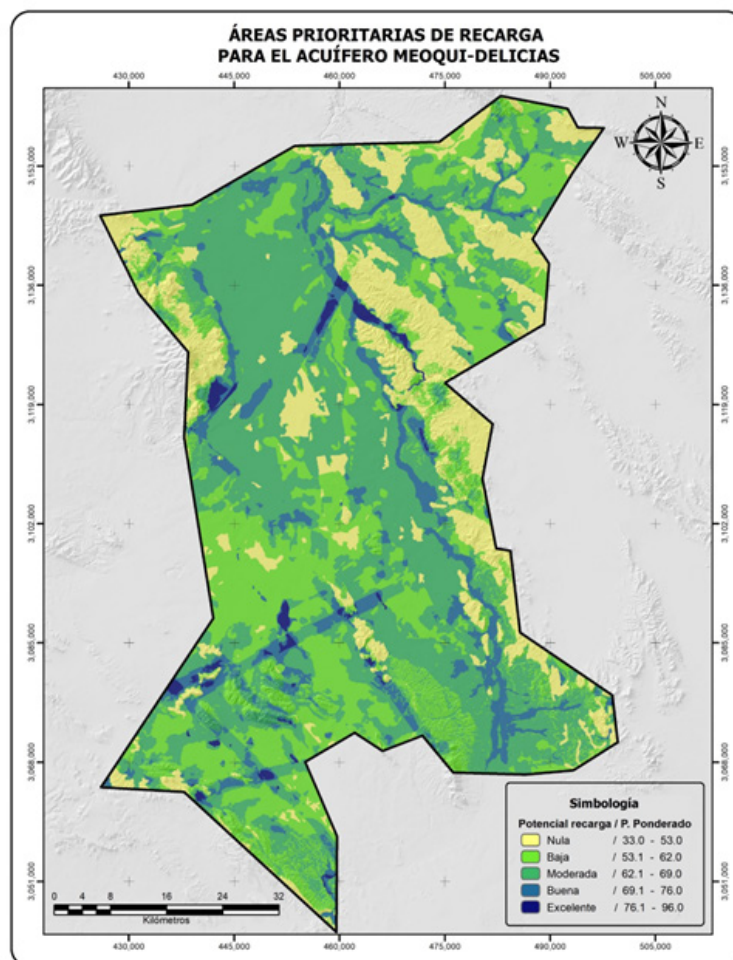


Figura 3. Mapa de APR para el acuífero Meoqui-Delicias con la ponderación y capacidad de recarga. Fuente: Elaboración propia.

Las APR con capacidad excelente se localizan en las zonas cercanas al pie de monte. Esta geofor-  
ma es la transición entre el valle y la montaña. Hidrogeológicamente se caracterizan por tener una  
porosidad alta pues entre las fracturas presentes y material no consolidado con bajas pendientes  
facilitan la infiltración y recarga de agua al acuífero.

Destaca que gran parte del acuífero presenta una recarga moderada. Esta característica se obser-  
va a lo largo y ancho del valle y está asociado principalmente a la zona de cultivo concerniente al  
Distrito de Riego 005. Las áreas menos propensas a la recarga se encuentran en las serranías al este  
del acuífero como las Sierras Ojuelos, Humboldt, La Boquilla, El carrizo, El Pajarito y, al oeste del  
mismo, la sierra Alta, que por su naturaleza geológica (rocas volcánicas) se vuelven incapaces para  
almacenar agua. Adicionalmente las zonas con nula recarga coinciden con las zonas urbanas y los  
picos en la montaña.

#### **4. Conclusiones**

En este estudio se generó una aproximación para determinar las áreas que tienen capacidad de re-  
carga agua, mediante un análisis geoespacial en GIS para el acuífero Meoqui-Delicias localizado en  
el estado de Chihuahua al Sureste de la capital. Finalmente se generó un mapa con las áreas priori-  
tarias de recarga.

La importancia de los resultados de este estudio puede incidir en el aprovechamiento sostenible del  
agua subterránea. Con una gestión adecuada se puede aumentar la recarga en el acuífero. Los resul-  
tados indican que la aplicación de GIS y el uso de estas técnicas ayudan a la prospección de aguas  
subterráneas y a reducir las áreas para realizar estudios hidrogeológicos detallados.

Los resultados indican que la zona con mayor capacidad para recargar se encuentra en la zona de  
pie de monte donde se unen las planicies con montañas. En esta región el estrato de grava y la con-  
centración de drenaje también favorecen a la generación del caudal a recargar el sistema de agua  
subterránea. La concentración (o densidad) de drenaje repercute en la capacidad para recargar agua  
subterránea a partir de la precipitación.

Es conveniente revisar la propuesta en la asignación de valores en particular para las zonas urbanas  
si bien es cierto que suelen tener una cobertura impermeable, existe un factor como las fugas en la  
red de distribución de agua potable que eventualmente genera recarga

Se generaron mapas independientes que pueden ser utilizados como referencia por parte de orga-  
nismos de gobierno, tomadores de decisiones o instituciones en la selección preliminar de sitios  
adecuados para la gestión de recursos de agua subterránea, por ejemplo, la construcción de estruc-  
turas para la recarga del acuífero.

Esta investigación, como muchas otras en distintos acuíferos del estado de Chihuahua, permite un  
análisis general de la situación del acuífero y es instrumento para lograr una mejor gobernanza y  
gobernabilidad del recurso hídrico.

## 5. Referencias Bibliográficas

- Aparicio, F. J. (1992). *Fundamentos de Hidrología de Superficie*. México: Limusa.
- CONAGUA. (2018). Actualización de la disponibilidad media anual de agua en el acuífero Meoqui-Delicias (0831), Estado de Chihuahua. México. Recuperado el 31 de agosto de 2020, de <https://www.gob.mx>
- ESRI. (15 de octubre de 2020). ArcGIS desktop. Obtenido de la dirección <https://desktop.arcgis.com/es/arcmap/10.5/manage-data/raster-and-images/what-is-raster-data.htm#GUID-CBED6408-2437-4554-A3E1-F0FDC4AFBD63>
- INEGI. (2017). *Guía para la interpretación de Cartografía: uso del suelo y vegetación escala 1:250 000 Serie VI*. México: Instituto Nacional de Estadística y Geografía.
- Matus, Ó., Faustino, J., & Jiménez, F. (2009). *Guía para la identificación participativa de zonas con potencial de recarga hídrica: Aplicación práctica en la subcuenca del río Jucuapa, Nicaragua*. Turrialba: Asdi.
- Mishra, U. S. (2019). Probabilistic groundwater recharge zonation in hard rock terrain using geospatial techniques in Veniar watershed, South India. *Ecohydrology & Hydrobiology*, 1-15. Recuperado el 7 de octubre de 2020, de <https://doi.org/10.1016/j.ecohyd.2019.01.004>
- Méndez, M. (2020). La cobertura vegetal como reductor del escurrimiento superficial y la pérdida de suelo. *FING-UACH. Revista de Investigación Científica y Tecnológica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chihuahua*(7(23)), 29-33. doi:p-ISSN:2448-5489
- Qaddah, H. H. (2011). Groundwater potentiality mapping in the Sinai Peninsula, Egypt, using remote sensing and GIS-watershed-based modeling. *Hydrogeology Journal*, 613-628.
- Rubilar, H. N. (1999). *Apuntes de Geología Estructural primera parte: Estructuras frágiles*. Antofagasta.
- Shaban, A., Khawlie, M., & Abdallah, C. (2004). Use of remote sensing and GIS to determine recharge potential zones: the case of Occidental Lebanon. *Hydrogeology Journal*, 433-443.
- Yeh, H.-F., Cheng, Y.-S., Lin, H.-I., & Lee, C.-H. (2015). Mapping groundwater recharge potential zone using a GIS approach in Hualian River, Taiwan. *Sustainable Environment Research*.



# Algoritmos de Inteligencia Artificial Aplicados a Predicciones Deportivas

Jesús Ignacio Rodríguez Sibaja y Luis Carlos González Gurrola  
Facultad de Ingeniería, UACH

## Resumen

Hoy en día los recursos computacionales nos han permitido hacer grandes avances en distintas áreas de estudios[1], ejemplo de esto son las detecciones de anomalías en tiempo real o predecir cuál será la siguiente compra de los clientes de supermercados; lo que estos ejemplos tienen en común son dos cosas: son logrados a partir del análisis de datos y se pueden interpretar como la capacidad de lo que el futuro deparará.

No es sorpresa de nadie que el ser humano siente la necesidad por conocer el futuro, predecir correctamente cualquier evento nos da seguridad, esto lo combinamos con todos los ámbitos posibles de nuestras vidas, desde un simple juego de piedra papel o tijera hasta nuestros deportes favoritos, en donde siempre queremos predecir quién ganará el siguiente partido.

## La información es nuestra aliada

Antes de tomar una decisión en nuestras vidas solemos informarnos, ya que así nos aseguramos de estar tomando la mejor decisión acorde a nuestra situación o necesidades.

Lo mismo pasa en el ámbito de las predicciones deportivas, en donde, a partir del desempeño mostrado por los equipos a lo largo de las temporadas, podremos ser capaces de seleccionar al equipo favorito para ganar en un encuentro deportivo.



## ¿Por qué ligas deportivas?

La industria del deporte es una de las que más ganancias aportan en la economía de sus respectivos países. En el año 2019 esta industria, solamente en México, generaba 114 mil millones de pesos anuales[2].

Con el rápido crecimiento de las tecnologías de la información y los deportes, el análisis de la información deportiva se ha convertido en un tema cada vez más desafiante. El big data deportivo que proviene del internet muestra una tendencia de rápido crecimiento[3].

Muestra de lo anterior es el hecho de que cada día se generan cientos de millones de datos deportivos de los cuales podremos aprovecharnos para transformar dichos datos en información[3].



### ¿Qué datos nos interesan?

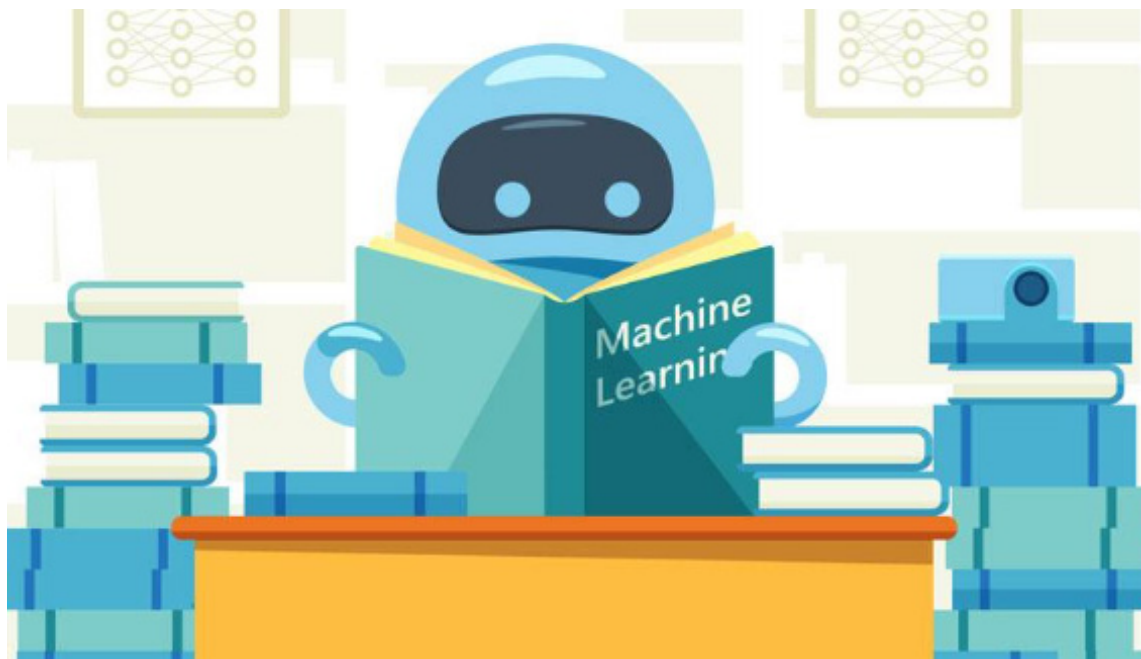
Para decidir qué datos usaremos, debemos determinar qué nos interesa saber de los equipos. Tomemos por ejemplo el desempeño ofensivo y defensivo de cada equipo.

Para reflejar el poder ofensivo de un equipo podemos usar características como: los puntos hechos, rebotes, robos de balón y su porcentaje de victorias sobre juegos jugados, mejor conocido como, win rate.

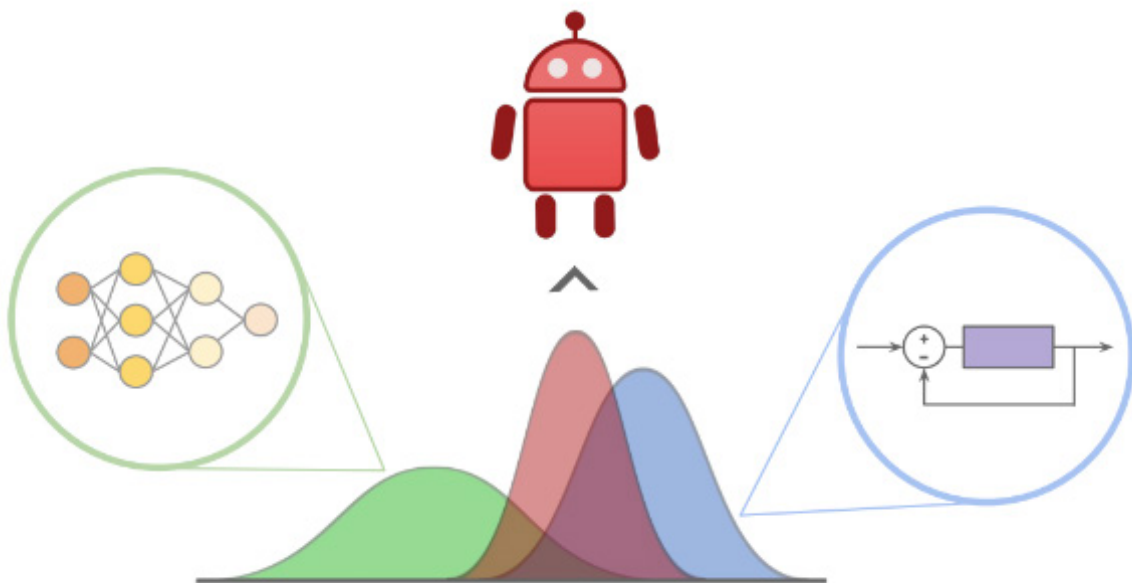
En caso del poder defensivo hemos utilizado, los puntos que les han anotado, y el control del balón. Todas estas características anteriores calculadas en promedio hasta el partido actual y dependiendo de la posición de los equipos (local o visitante).

### Hablemos de clasificadores

Los clasificadores son un conjunto de acciones e instrucciones programadas, realizadas por una computadora, que tiene como objetivo clasificar los datos de entrada entre los posibles conjuntos de datos previamente determinados[4]. De tal manera que deseamos que el algoritmo clasifique un registros de estadísticas de los equipos prediciendo si ganará el equipo 1 ó el equipo 2.



Tras contar con los datos y sabiendo que estamos buscando un resultado binario (es decir, si gana el equipo X o Y) debemos empezar a escoger un clasificador que podamos usar en este tipo de problemas.



Para este caso de clasificación binaria, decidimos hacer pruebas con los siguientes clasificadores:



## KNN

K-nearest neighbor (KNN) es un clasificador que compara el partido actual con los partidos anteriores para intentar encontrar uno similar y determinar qué equipo es más probable que salga ganador[5].

## Regresión logística

Este clasificador analiza las estadísticas de ambos equipos, compara las estadísticas y resultados de partidos anteriores para decidir quién es el más probable que sea el ganador del encuentro[5].

## XGBOOST

Este algoritmo hace uso de árboles de decisión, generando n cantidad de árboles de decisiones con variables escogidas aleatoriamente y en base al promedio de los resultados de estos árboles nos da un resultado[5].

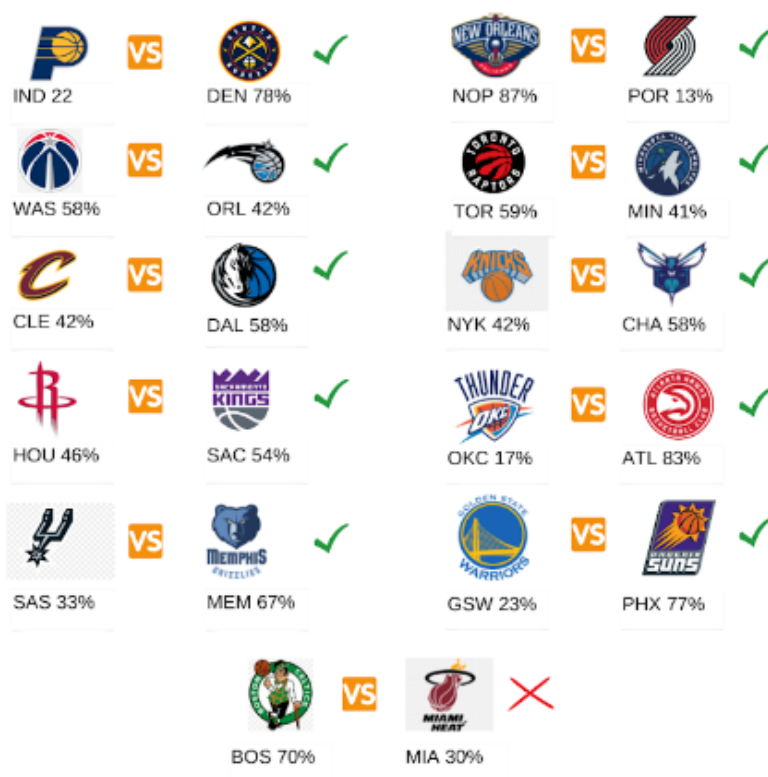
De estos 3 modelos (poniéndolos a prueba con datos históricos) hemos decidido escoger la regresión logística, debido a que fue el clasificador que mejor desempeño demostró de los 3.

A continuación, abordaremos un día de juegos de la temporada que acaba de terminar.

## Ejemplos de predicciones – un día dado

El día 30 de abril del 2022 se jugaron un total de 11 partidos dentro de la liga de baloncesto profesional NBA, para los cuales el clasificador determinó los siguientes ganadores con su respectiva probabilidad. Podemos observar que de 11 encuentros, el clasificador logró predecir, o determinar 10 de ellos.

### JORNADA DEL 30 DE ABRIL DEL 2022



10 de 11 juegos predichos de manera correcta, lo que representa un 90% de certeza

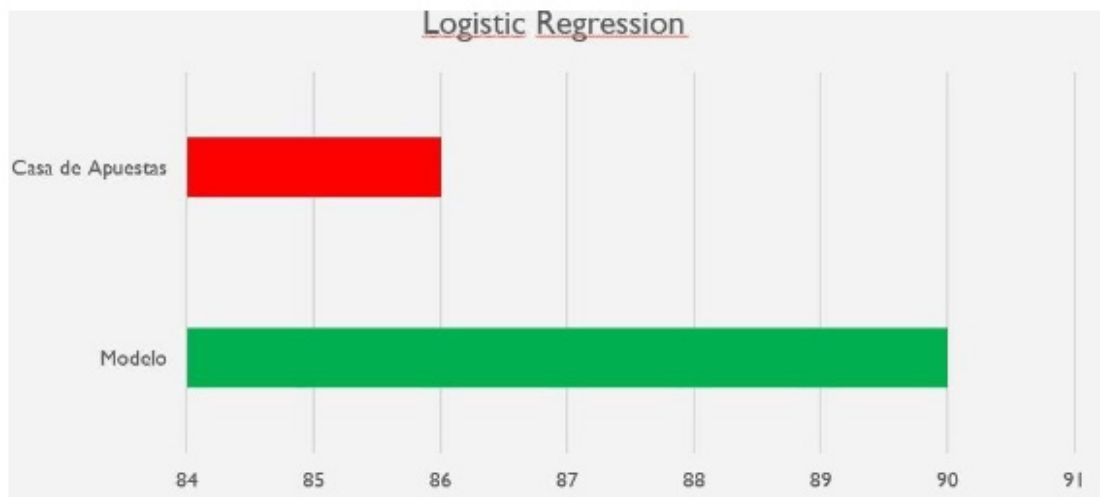
Si bien, el desempeño en este día en particular fue de un 90%, hace falta hacer un muestreo más extenso para determinar un desempeño más realista de nuestro clasificador.

#### Desempeño de nuestra bola de cristal

Para determinar el rendimiento de nuestra bola de cristal, se puso a prueba en tiempo real durante un mes de juegos de baloncesto profesional. Durante ese mes lo comparamos contra una casa de apuestas de las Vegas, para así tener un punto de comparación.

Probabilidad	Aciertos	Porcentaje de acierto
>50%	24/36	66.66%
>60%	27/40	67.5%
>70%	18/25	72%
>80%	21/25	84%
	90/126	71.43%

La columna “probabilidad” es la certeza que el clasificador tiene de su elección.



Al cabo de un mes el clasificador mostró un desempeño de un 71.43%, mayor al de la casa de apuestas el cual es de un 68.25%.

### ¿Y ahora qué?

Por el momento, los resultados mostrados anteriormente son destacables, por esto mismo es imposible sentirnos entusiasmados por encontrar márgenes de mejora, en cualquier parte del proceso mencionado, que pueda derivar en unas predicciones más certeras.

Finalmente cabe destacar que, lo reportado en este artículo es solo una antesala de las posibilidades que lograremos alcanzar en el ámbito de las predicciones en un futuro, haciendo uso de modelos de Machine Learning.

### Referencias

- [1] .A. Abeliuk and C. Gutiérrez, “Historia y evolución de la inteligencia artificial,” Bits de Ciencia, vol. 2021, no. 21, pp. 14–21, 03-Aug-2021.
- [2] Desarrollo de Medios, “Dan a conocer Impacto del Futbol en Economía Nacional,” La Jornada, 20-Nov-2019. [Online]. Available: <https://www.jornada.com.mx/2019/11/20/deportes/a11n-2dep>. [Accessed: 22-Mar-2022].
- [3] Horvat, T., & Job, J. (2020). The use of machine learning in sport outcome prediction: A Review. WIREs Data Mining and Knowledge Discovery, 10(5). <https://doi.org/10.1002/widm.1380>
- [4] I. Gavilán, “Clasificadores: El Encuentro Entre Data Science, machine learning y redes neuronales,” Clasificadores: el encuentro entre Data Science, Machine Learning y Redes Neuronales, 05-Jun-2017. [Online]. Available: <http://bluechip.ignaciogavilan.com/2017/06/clasificadores-el-encuentro-entre-data.html>. [Accessed: 11-Jul-2022].
- [5] A. P. D. R. Redacción APD Toda la actualidad de la Comunidad Global de Directivos en un nuevo canal de contenidos digitales., “¿Cuáles son los tipos de algoritmos del machine learning?” APD España, 18-Nov-2020. [Online]. Available: <https://www.apd.es/algoritmos-del-machine-learning/>. [Accessed: 02-Apr-2022].