



**FINGUACH**

**Año 2 · Número 3 · Julio - Diciembre 2021**

**Universidad Autónoma de Chihuahua**  
Facultad de Ingeniería

**E-ISSN: 2683-3387**

<https://vocero.uach.mx/index.php/finguach>



**UACH**  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
**CHIHUAHUA**

Dr. Jesús Villalobos Jión  
**Rector**

M.E.A. Alfredo Ramón Urbina Valenzuela  
**Director de Investigación y Posgrado**

M.L. Ramón Gerónimo Olvera Neder  
**Director de Extensión y Difusión Cultural**

M.I. Javier González Cantú  
**Director de la Facultad de Ingeniería**



La revista FINGUACH, año 2, No. 3, Julio-Diciembre 2021, es una publicación semestral editada por la Universidad Autónoma de Chihuahua, calle Escorza 900, Col. Centro, Chihuahua, Chih., C.P. 31000, Tel. (614) 442-9500 ext 2545, <https://vocero.uach.mx/index.php/finguach>. Editor responsable: Javier González Cantú. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2021-102814085300-203, E-ISSN: 2683-3387, otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Responsable de la última actualización de este Número, Javier González Cantú, Editor, Circuito No. 1, Campus Universitario II, Chihuahua, Chih., C.P. 31125, el día 30 de noviembre de 2021. Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación. Queda prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma de Chihuahua.



**latindex**

# Contenido

Carta del Editor	2
Estudio semiclásico de un modelo cuántico cosmológico homogéneo e isotrópico $\Lambda$ CDM	3

## Comite Editorial

**M.I. Javier González Cantú**  
Editor en jefe

**M.I. David Maloof Flores**  
Editor

**Dr. José Luis Herrera Aguilar**  
Editor

**Dr. Alejandro Villalobos Aragón**  
Editor

**M.I. Jesús Roberto López Santillán**  
Editor

**Dr. Luis Carlos González Gurrola**  
Editor

**M.A. Luis Carlos González Martínez**  
Editor

**M.E.S. Irma Liz Piñón Carmona**  
Editora





## Carta del editor

**L**a revista FINGUACH ha transitado a la distribución electrónica, buscando que cuente con dos Números Internacionales Normalizados de Publicaciones Seriadas (Printed ISSN y Electronic ISSN), otorgando una oportunidad para facilitar la distribución electrónica de futuras publicaciones, y abriendo puertas para ingresar a distintos sistemas de indización.

Asimismo, el Comité Editorial de FINGUACH continúa replanteando estrategias para asegurar la calidad, y mejorar la visibilidad e impacto de la revista. Esta actualización abarca esencialmente el proceso de arbitraje con revisión por pares doble ciego, en una modalidad de publicación continua (semestral, enero y julio) y, de igual manera, buscamos ampliar la base de datos de revisores (nacionales e internacionales). Trabajaremos a fin de asegurar la calidad y ética de las publicaciones con acciones que nos permitan lograr los más elevados índices.

Agradecemos a los autores que participan en cada número, a los lectores y al equipo de trabajo de la revista. En esta ocasión este espacio servirá de agradecimiento a Gustavo Alejandro Sánchez Herrera y Héctor Hugo Hernández Hernández, por compartirnos el artículo “Estudio semiclásico de un modelo cuántico cosmológico homogéneo e isotrópico  $\Lambda$ CDM”.

Así mismo, en esta ocasión me permito utilizar este espacio para agradecer a la doctora Guadalupe Irma Graciela Estrada Gutierrez, quien falleció el pasado 3 de diciembre de 2021. La revista FINGUACH le debe mucho a la doctora Guadalupe Estrada, estimada catedrática de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chihuahua, quien ha participado activamente en el Comité Editorial de FINGUACH desde marzo del 2015. Quedará la importancia de su prominente obra académica y el recuerdo de su calidad humana.

**Javier González Cantú**  
*Editor*



# Estudio semiclásico de un modelo cuántico cosmológico homogéneo e isotrópico $\Lambda$ CDM

Gustavo Alejandro Sánchez Herrera<sup>1</sup> , Héctor Hugo Hernández Hernández<sup>2</sup>

## Resumen

En este trabajo obtenemos el análisis dinámico de un modelo cosmológico homogéneo e isotrópico cuántico cuyo contenido de materia es un fluido perfecto. Primero se estudia el modelo clásico de materia oscura fría ( $\Lambda$ CDM) determinando la evolución del factor de escala por medio de su trayectoria. Posteriormente, se extiende el análisis al modelo cuántico mediante una aproximación semiclásica con condiciones iniciales y de frontera adecuadas para obtener la dinámica. Con ello se comparan las soluciones y determinan los efectos cuánticos sobre las trayectorias clásicas. Se encuentran similitudes en el comportamiento del factor de escala clásico y semiclásico para diferentes contenidos de materia. Finalmente, analizamos la remoción de la singularidad clásica (Big Bang) con ciertas condiciones de frontera.

*Palabras clave: Cosmología. Materia oscura. Aproximación semiclásica. Singularidad inicial.*

## 1. Introducción.

El modelo cosmológico estándar con materia oscura fría  $\Lambda$ CDM (Lambda cold dark matter), es más utilizado para describir la estructura y la dinámica del universo a gran escala debido a la gran coincidencia que posee con los datos observacionales (Akarsu, y otros, 2020); está descrito por la métrica que define un universo homogéneo e isotrópico propuesta por Friedmann- Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) (Green & Wald, 2014). Debido a su simplicidad matemática y su importancia en cosmología, el modelo  $\Lambda$ CDM ha sido estudiado ampliamente con diferentes fines, por ejemplo, el estudio de las perturbaciones lineales, escalares y tensoriales en modelos Robertson-Walker espacialmente planos (Alho, Uggla, & Wainwright, 2019) o el análisis de las constricciones observacionales y su dependencia con el parámetro de curvatura utilizando información de supernovas tipo Ia (SNIa) y el telescopio espacial Hubble (Velasquez-Toribio & dos R Magnago, 2020).

Los modelos de gravedad modificada como una extensión del modelo estándar permiten explicar los efectos de la energía y materia oscura, dentro de estas extensiones se encuentra un modelo de gravedad modificada acoplado a un campo escalar que genera dinámicamente la constante cosmológica a partir de las simetrías de Noether (Benisty, Guendelman, Nissimov, & Pacheva) y el desarrollo de un modelo de energía-momento construido a partir de una corrección en la acción estándar de Einstein-Hilbert (Akarsu, Barrow, Board, Uzun, & Vazquez, 2019). Además de los modelos de gravedad modificada, se han realizado cambios en la ecuación de estado que generalizan el contenido de materia del universo incluyendo viscosidad (Ren & Meng, Modified equation of state, scalar field, and bulk viscosity in Friedmann universe, 2006). La cosmología clásica permite estudiar estas propiedades a gran escala, sin embargo, cuando se retrocede la evolución cosmológica hasta llegar a escalas microscópicas las ecuaciones de la relatividad general dejan de ser aplicables y surgen diferentes singularidades iniciales en donde el radio del universo se hace cero, estas singularidades se conocen como el Big Bang y Big Crunch (Kamenshchik, 2013), por esta razón, se ha optado por describir el universo de manera cuántica mediante el uso de una función de onda en lugar del espacio-

tiempo clásico (Vilenkin, 1995). A esta teoría que involucra la descripción cuántica de la cosmología se le conoce como cosmología cuántica (Bojowald, *Quantum cosmology: a fundamental description of the universe*, 2011).

En la búsqueda de una teoría de gravedad cuántica que permita estudiar los fenómenos a escalas microscópicas existen diferentes modelos que comparten características dentro de los cuales destacan la teoría de cuerdas y la gravedad cuántica de lazos (LQG). La teoría de cuerdas ha permitido desarrollar escenarios cosmológicos que evitan la singularidad inicial al considerar las fases de colapso y expansión con horizontes cosmológicos futuros y pasados (Cornalba & Costa, *A new cosmological scenario in string theory*, 2002) y tomando en cuenta la presencia de una constante cosmológica negativa localizada en una hipersuperficie dimensional tipo-tiempo (Cornalba, Costa, & Kounnas, *A resolution of the cosmological singularity with orientifolds*, 2002). Por otro lado, los modelos derivados de LQG con simetría homogénea e isotrópica, denominados cosmología cuántica de lazos (LQC), también han sido efectivos en la remoción de este tipo de singularidades (Bojowald, *Absence of a singularity in loop quantum cosmology*, 2001).

La cosmología cuántica permite hacer predicciones sobre la evolución del cosmos a partir de un estado cuántico inicial, este estado puede ser útil para describir características presentes en el universo como la homogeneidad e isotropía a gran escala, o el espectro de radiación que se obtuvo a partir del origen la estructura de la materia (Gell-Mann & Hartle, 1996). Estudiar el comportamiento cuántico de ciertos modelos cosmológicos presenta generalmente un alto nivel de complejidad, por lo que usualmente es necesario utilizar métodos de aproximación. Las aproximaciones semiclásicas son importantes para estudiar modelos derivados de la gravedad cuántica, ya que dan información de sistemas cuánticos complejos (Bojowald, Brizuela, Hernández, Koop, & Morales-Técotl, 2011).

Una manera de aproximar soluciones de modelos cuánticos es mediante el desarrollo de ecuaciones efectivas que describen la evolución de los valores esperados de observables y dispersiones cuánticas como un sistema dinámico a partir de un Hamiltoniano con un número infinito de grados de libertad (Bojowald & Skirzewski, *Effective equations of motion for quantum systems*, 2006). Este método ha permitido estudiar sistemas cuánticos interesantes, por ejemplo, tunelaje cuántico (Aragón-Muñoz, Chacón-Acosta, & Hernández-

Hernandez, 2020) y modelos de cosmología cuántica (Bojowald, Brizuela, Hernández, Koop, & Morales-Técotl, 2011). Una de las características más importantes del método anterior es que los infinitos grados de libertad no son variables canónicas entre sí, además, de ser necesario un truncamiento del sistema para obtener las ecuaciones de movimiento (Bojowald & Skirzewski, Effective equations of motion for quantum systems, 2006). Sin embargo, recientemente se ha obtenido una nueva formulación en términos de variables canónicas, a partir de la cual se determina un potencial que contiene toda la información cuántica del sistema, que no necesita truncamientos (Baytaş, Bojowald, & Crowe, Effective potentials from semiclassical truncations, 2019). La organización de este trabajo es la siguiente: en la sección 2 se analiza un modelo clásico  $\Lambda$ CDM mediante un Hamiltoniano obtenido a partir de un cambio de variable del factor de escala  $a(t)$  a una función  $\phi(t)$ . En la sección 3 se muestra el formalismo semiclásico de sistemas cuánticos. En la sección 4 y 5 se desarrolla y analiza el modelo utilizando ambos métodos semiclásicos. Finalmente, en la sección 6 se discuten los resultados obtenidos.

## 2. El modelo clásico $\Lambda$ CDM

La métrica que describe un universo homogéneo e isotrópico en expansión es la propuesta por Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (Cervantez-Cota & Smoot, 2011)

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \theta d\phi^2) \right], \quad (1)$$

donde  $k$  es la constante que representa la curvatura del espacio y  $a(t)$  es una función que determina el radio del universo conocida como el factor de escala. Las ecuaciones de campo de Einstein son,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \hat{T}_{\mu\nu},$$

donde  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein y  $\hat{T}_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + (p - \frac{\Lambda}{8\pi G})g_{\mu\nu}$  es el tensor de materia para un fluido cósmico (Ren, Meng, & Zhao, Hamiltonian formalism in Friedmann cosmology and its quantization, 2007). Utilizando la métrica de la ec. (1), se obtienen dos ecuaciones independientes

que determinan la evolución del factor de escala  $a(t)$ . De la componente temporal del tensor de Einstein  $G_{00}$  se obtiene la ecuación de Friedmann

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 \rho + \frac{\Lambda}{3} a^2 - k, \quad (2)$$

y de la componente espacial  $G_{i,j}$  se obtiene la ecuación de Raychaudhuri

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} a(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} a. \quad (3)$$

Las ecuaciones ec. (2) y ec. (3) contienen tres incógnitas, el factor de escala  $a(t)$ , la densidad de energía  $\rho(t)$  y la presión  $p(t)$ , para resolver este sistema se introduce una ecuación que relaciona la densidad de energía y la presión de la materia denominada ecuación de estado

$$p = (\gamma - 1)\rho, \quad (4)$$

donde  $\gamma$  es una constante cuyo valor está entre  $1 < \gamma < \frac{4}{3}$  para partículas relativistas y  $\gamma = 1$  para partículas no relativistas (Ryden, 2017). Combinando la ec.(2) y ec.(4) con la ec.(3) obtenemos una expresión que determina la evolución del factor de escala  $a(t)$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{(3\gamma - 2)\dot{a}^2}{2a^2} + \frac{\gamma\Lambda}{2} - \frac{(3\gamma - 2)k}{2a^2},$$

absorbiendo las constantes del tercer término en una nueva constante  $K$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{(3\gamma - 2)\dot{a}^2}{2a^2} + \frac{\gamma\Lambda}{2} - \frac{K}{a^2}. \quad (5)$$

La ec. (5) describe particularmente el modelo  $\Lambda$ CDM.

De manera más general se puede asumir que  $\gamma$  y  $\Lambda$  son funciones del factor de escala  $a(t)$ . En este caso, el modelo generalizado FLRW es

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{(3\gamma(t)-2)\dot{a}^2}{2a^2} + \frac{\gamma(t)\Lambda(t)}{2} - \frac{K(t)}{a^m}.$$

La ec. (5) se puede leer de la siguiente manera

$$\ddot{a} = f_1(a)\dot{a}^2 + f_2(a),$$

donde

$$f_1(a) = -\frac{(3\gamma - 2)}{2a}, \quad f_2(a) = \frac{\gamma\Lambda a}{2} - \frac{K}{a}.$$

Para obtener una formulación Hamiltoniana de este modelo se realiza una transformación de  $a \rightarrow \phi, p_a \rightarrow p_\phi$  (Ren, Meng, & Zhao, Hamiltonian formalism

in Friedmann cosmology and its quantization, 2007), donde la nueva variable  $\phi$  se define de la siguiente manera

$$\phi \equiv \int \exp \left( - \int f_1(a) da \right) da.$$

El Hamiltoniano que se obtiene es de la forma  $H(\phi, p_\phi) = \frac{1}{2} p_\phi^2 + \hat{V}(\phi)$ , donde  $\phi$  y  $p_\phi$  son variables canónicas conjugadas. El potencial  $\hat{V}(\phi)$  se calcula a partir de la siguiente ecuación

$$\hat{V}(\phi) = - \int \left[ f_2(a) \exp \left( - \int f_1(a) da \right) \right]_{a \rightarrow \phi} d\phi.$$

El Hamiltoniano correspondiente al modelo  $\Lambda$ CDM es entonces

$$H_{\Lambda\text{CDM}} = \frac{1}{2} p_\phi^2 - \frac{3}{8} \gamma^2 \Lambda \phi^2 + \frac{K}{(3\gamma - 2)} \left( \frac{3\gamma\phi}{2} \right)^{2 - \frac{4}{3\gamma}}, \quad (6)$$

con la función  $\phi(t)$  definida por

$$\phi(t) \equiv \frac{2}{3\gamma} a(t)^{\frac{3\gamma}{2}},$$

despejando se obtiene el factor de escala  $a(t)$  en términos de la función  $\phi(t)$

$$a(t) = \left( \frac{3\gamma}{2} \right)^{\frac{2}{3\gamma}} \phi(t)^{\frac{2}{3\gamma}}.$$

De esta ecuación se observa que la relación entre la  $\phi(t)$  y  $a(t)$  es polinómica. La dinámica se obtiene a través del corchete de Poisson entre las variables canónicas con el Hamiltoniano clásico

$$\dot{\phi} = \{ \phi, H_{\Lambda\text{CDM}} \}, \quad \dot{p}_\phi = \{ p_\phi, H_{\Lambda\text{CDM}} \}.$$

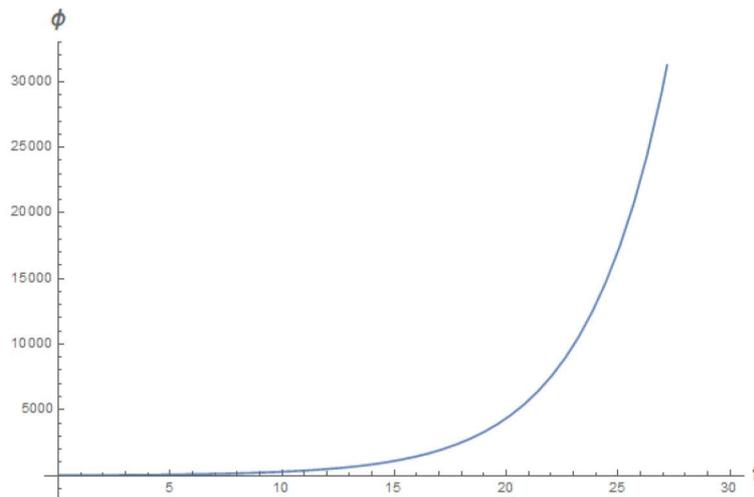
Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para  $\phi$  y  $p_\phi$  son

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p_\phi, \\ \dot{p}_\phi &= \frac{3}{4} \gamma^2 \Lambda \phi + f_0(\phi). \end{aligned}$$

donde la función  $f_0(\phi)$  es

$$f_0(\phi) = - \frac{\gamma K}{(3\gamma - 2)} \left( 2 - \frac{4}{3\gamma} \right) \left( \frac{3}{2} \right)^{2 - \frac{4}{3\gamma}} (\gamma\phi)^{1 - \frac{4}{3\gamma}}. \quad (7)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones anterior de manera numérica se establecen primero ciertos parámetros. Debido a que el valor de la constante cosmológica es pequeño (Davies & Unwin, 1981), se establece que  $-0.1 \leq \Lambda \leq 0.1$ ;  $\gamma$  puede tomar valores dentro de un rango de  $1 \leq \gamma \leq \frac{4}{3}$  dependiendo de si el contenido de materia en el universo es radiación o materia ordinaria, por último, para el término que contribuye a la curvatura se tiene que  $-1 \leq K \leq 1$ . La evolución  $\phi(t)$  debe corresponder a una expansión acelerada cuando la constante cosmológica es positiva y el contenido de materia del universo es no relativista ( $\gamma = 1$ ). La evolución para  $\Lambda = 0.1$ ,  $\gamma = 1$  y  $K = 0$  se muestra en la figura 1.



**Figura 1:** Evolución de la función  $\phi(t)$  para un universo con contenido de materia no relativista, y  $\Lambda = 0.1$ ,  $\gamma = 1$  y  $K = 0$ .

La materia no relativista frena la expansión del universo debido a los efectos de atracción gravitacional, como es de esperarse, si el universo contuviera solamente radiación no debería de existir esta desaceleración por parte de la materia y la expansión del universo sería más rápida, la comparación de la evolución se muestra en la figura 2. En este caso, se observa que la expansión del universo es un orden de magnitud mayor cuando se utiliza radiación en lugar de materia ordinaria.

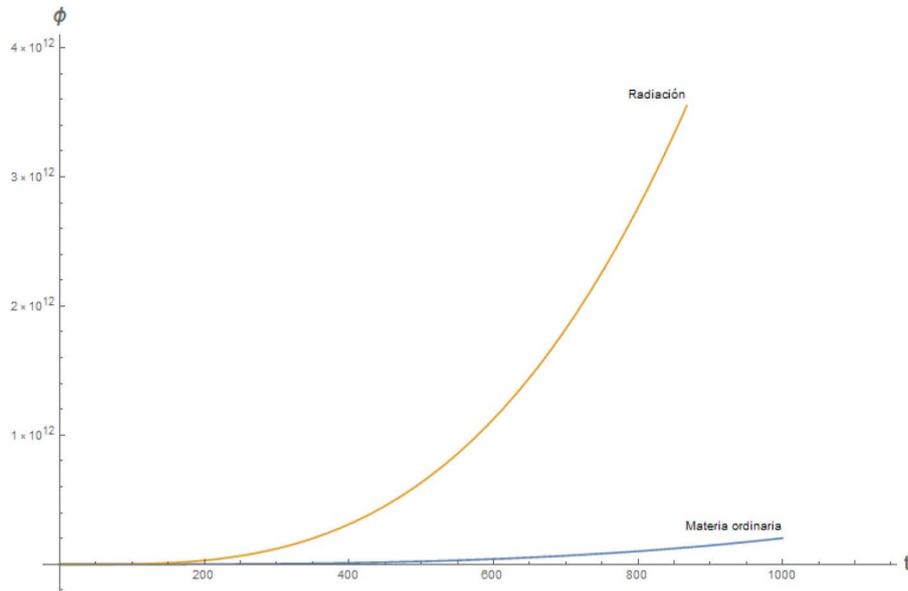


Figura 2: Evolución de la función  $\phi(t)$ , para un universo con contenido de materia ordinaria ( $\gamma = 1$ ) y radiación ( $\gamma = \frac{4}{3}$ ), y  $\Lambda = 0.1$ .

Cuando se considera una constante cosmológica negativa, la evolución del universo muestra un comportamiento oscilante (figura 3), y una expansión lineal para  $\Lambda = 0$  (figura 4).

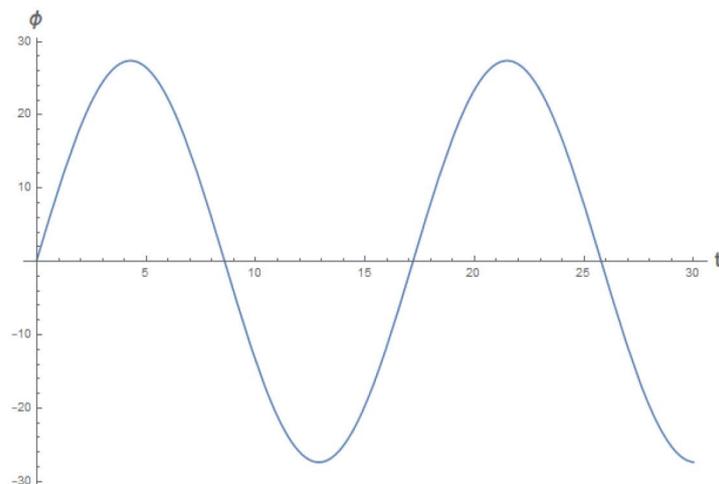


Figura 3: Evolución de la función  $\phi(t)$  para un universo con contenido de materia no relativista, y  $\Lambda = -0.1$ ,  $\gamma = 1$  y  $K = 0$ .

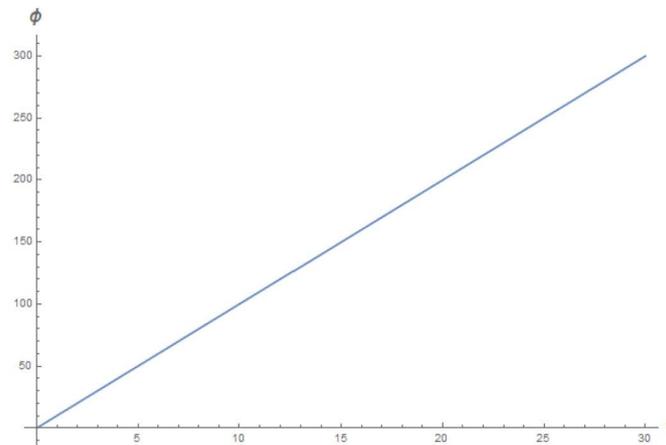


Figura 4: Evolución de la función  $\phi(t)$  para un universo con contenido de materia no relativista, y  $\Lambda = 0$ ,  $\gamma = 1$  y  $K = 0$ .

### 3. Formalismo semiclásico

En mecánica cuántica usual la evolución se determina a partir de la ecuación de Schrödinger, expresada como  $\hat{H}\psi = E\psi$ , donde  $\hat{H}$  es el operador Hamiltoniano actuando sobre la función de onda  $\psi$ , y  $E$  es la energía. En esta formulación no es posible obtener una interpretación clásica de variables de configuración, toda la información del sistema está codificada en la función de onda. Sin embargo, es posible aplicar el teorema de Ehrenfest y con ello obtener una ecuación de evolución semiclásica, por medio de un Hamiltoniano corregido,  $\langle \hat{H} \rangle = H_Q$ , que depende de valores esperados de observables ( $\langle \hat{x} \rangle$  y  $\langle \hat{p} \rangle$ ) y de dispersiones cuánticas. La dinámica de este sistema efectivo se obtiene por medio de la relación  $\{f, g\} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{f}, \hat{g}] \rangle$ , donde  $f = \langle \hat{f} \rangle$ . Los valores esperados de las dispersiones cuánticas (momentos) se definen como

$$G^{a,b} := \langle (\hat{p} + p)^a (\hat{q} - q)^b \rangle_{weyl},$$

donde el subíndice *weyl* significa que los operadores están completamente simetrizados. Entonces, el Hamiltoniano semiclásico se puede escribir (Bojowald & Skirzewski, Effective equations of motion for quantum systems, 2006).

$$H_Q = \langle \hat{H} \rangle = H_{cl} + \sum_{a,b=0}^{\infty} \frac{1}{a! b!} \frac{\partial^{a+b} H_{cl}}{\partial p^a \partial q^b} G^{a,b}. \quad (8)$$

donde  $H_{cl}$  es el Hamiltoniano clásico del sistema en cuestión.

Los momentos no son completamente independientes, están sujetos a la incertidumbre de Heisenberg

$$G^{2,0} G^{0,2} - (G^{1,1})^2 \geq \frac{\hbar}{4}.$$

Las relaciones de conmutación entre los momentos y las variables clásicas de posición y momento son

$$\{G^{a,b}, q\} = \{G^{a,b}, p\} = 0,$$

mientras que el álgebra de variables  $G^{a,b}$  es

$$\begin{aligned} \{G^{a,b}, G^{c,d}\} &= adG^{a-1,b}G^{c,d-1} - bcG^{a,b-1}G^{c-1,d} \\ &+ \sum_n \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{n-1} K_{abcd}^n G^{a+c-n,b+d-n}, \end{aligned} \quad (9)$$

con  $1 \leq n \leq \text{Min}(a+c, b+d, a+b, c+d)$ .  $K_{abcd}^n$  se define por

$$\begin{aligned} K_{abcd}^n &= \sum_{m=0}^n (-1)^m m! (n-m)! \binom{a}{m} \binom{b}{n-m} \times \binom{c}{n-m} \binom{d}{m} \\ &= 2^n \sum_{m=0}^n (-1)^m C_{ad}^m C_{bc}^{n-m}, \end{aligned}$$

y los coeficientes  $C_{kn}^d$  son

$$C_{kn}^d = \frac{n! k!}{(n-d)! (k-d)! (2d)!!} = \frac{d!}{2^d} \binom{n}{d} \binom{k}{d}.$$

Nótese que las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de la ec. (8) forman un sistema de un número infinito de grados de libertad, mismo que es, en general, imposible de resolver. Para analizarlo se requiere usualmente realizar truncamientos consistentes; por ejemplo, para un truncamiento a segundo orden utilizando la ec. (9) el álgebra requerida es la siguiente

$$\begin{aligned} \{G^{0,2}, G^{1,1}\} &= 2G^{0,2}, \\ \{G^{1,1}, G^{2,0}\} &= 2G^{2,0}, \end{aligned}$$

$$\{G^{0,2}, G^{2,0}\} = 4G^{1,1}. \quad (10)$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen calculando el bracket de Poisson de las variables con el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{x, H_Q\}, \\ \dot{G}^{a,b} &= \{G^{a,b}, H_Q\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Debido a la complejidad de las ecuaciones obtenidas de ec. (8), usualmente la solución se obtiene por medio de métodos numéricos. Las condiciones iniciales para los momentos  $G^{a,b}$  se obtienen a partir de

$$\begin{aligned} G^{a,b} \equiv & \sum_{d=0}^{\text{Min}(a,b)} (-i\hbar)^a C_{ab}^d \int_{-\infty}^{\infty} d\chi \psi^*(\chi) (\chi - q_0)^{b-d} \\ & \times \left( \frac{d}{d\chi} - i \frac{p_0}{\hbar} \right)^{a-d}, \end{aligned} \quad (12)$$

donde  $\psi(\chi)$  es una función de onda inicial correspondiente a un pulso Gaussiano

$$\psi(\chi) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sigma}} \exp \left\{ -\frac{(\chi - q_0)^2}{2\sigma^2} + \frac{ip_0\chi}{\hbar} \right\}. \quad (13)$$

Como se observa en la ec. (9), los momentos  $G^{a,b}$  no son variables canónicas entre sí, dificultando el cálculo de las relaciones de conmutación. Mediante una generalización del teorema de Darboux es posible reescribir los momentos en términos variables canónicas. La ventaja de este cambio es que permite la construcción de un potencial efectivo que no necesita truncamientos. Tomando  $s = \sqrt{G^{0,2}}$  se construye el nuevo par canónico  $(s, p_s)$ . Las relaciones entre los momentos y las variables canónicas se obtienen a partir de (Baytaş, Bojowald, & Crowe, Effective potentials from semiclassical truncations, 2019)

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^{0,2}}{\partial p_s} &= 0, \\ \frac{\partial G^{1,1}}{\partial p_s} &= s, \\ \frac{\partial G^{2,0}}{\partial p_s} &= 2 \frac{G^{1,1}}{s}. \end{aligned}$$

Los momentos a segundo orden en términos del nuevo par canónico son

$$\begin{aligned} G^{0,2} &= s^2, \\ G^{1,1} &= sp_s, \\ G^{2,0} &= p_s^2 + \frac{U_1}{s^2}, \end{aligned}$$

donde  $U_1$  es una constante. Para órdenes superiores se aplica un procedimiento similar. Como se mencionó anteriormente, es posible obtener un potencial sin truncamiento dado por

$$\begin{aligned} V_{all}(q, s) &= V(q) + \frac{U}{2ms^2} + \sum_a \frac{1}{(2a)!} \frac{d^{2a}V(q)}{dq^{2a}} s^{2a} \\ &= \frac{U}{2ms^2} + \frac{1}{2}[V(q+s) + V(q-s)], \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $U$  y  $m$  son constantes, y  $V(q)$  es el potencial clásico.

#### 4. El modelo $\Lambda$ CDM semiclásico de momentos

La cosmología cuántica intenta resolver problemas cosmológicos clásicos en regiones pequeñas del espacio con gran cantidad de energía, como la singularidad inicial. El estudio semiclásico del modelo  $\Lambda$ CDM permite estudiar el origen del universo mediante el comportamiento del factor de escala  $a(t)$  en tiempos cercanos a  $t = 0$ .

Utilizando el Hamiltoniano clásico con materia oscura fría  $H_{\Lambda\text{CDM}}$  y la ec. (8) obtenemos el siguiente Hamiltoniano efectivo a segundo orden

$$\langle \hat{H} \rangle = H_{\Lambda\text{CDM}} + \frac{1}{2}G^{2,0} + f_1(\phi)G^{0,2}, \quad (15)$$

donde la función  $f_1(\phi)$  es

$$f_1(\phi) = -\frac{3}{4}\gamma^2\Lambda + \frac{9}{4}\frac{\gamma^2 K}{(3\gamma - 2)}\left(2 - \frac{4}{3\gamma}\right)\left(1 - \frac{4}{3\gamma}\right)\left(\frac{3\gamma\phi}{2}\right)^{-\frac{4}{3\gamma}}.$$

Las ecuaciones de movimiento obtenidas de la ec. (15) son

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \dot{p}_\phi \\ \dot{p}_\phi &= \frac{3}{4}\gamma^2\Lambda\phi + f_0(\phi) - \frac{1}{2}f_2(\phi)G^{0,2}, \\ \dot{G}^{2,0} &= -f_1(\phi)G^{1,1}, \\ \dot{G}^{1,1} &= G^{2,0} - f_1(\phi)G^{0,2}, \\ \dot{G}^{0,2} &= 2G^{1,1},\end{aligned}$$

con

$$f_2(\phi) = -\frac{9}{2}\frac{\gamma^2 K}{(3\gamma - 2)}\left(2 - \frac{4}{3\gamma}\right)\left(1 - \frac{4}{3\gamma}\right)\left(\frac{3\gamma\phi}{2}\right)^{-1-\frac{4}{3\gamma}},$$

y  $f_0$  esta dada por la ec. (7).

Las condiciones iniciales para los momentos  $G^{2,0}, G^{1,1}, G^{0,2}$  son

$$G^{2,0} = \frac{\hbar^2}{2\sigma^2}, \quad G^{1,1} = 0, \quad G^{0,2} = \frac{\sigma^2}{2},$$

La evolución de la función  $\phi(t)$  para este sistema de ecuaciones acopladas es similar a la solución clásica presentada en la sección anterior, como se muestra en la figura 5 y figura 6.

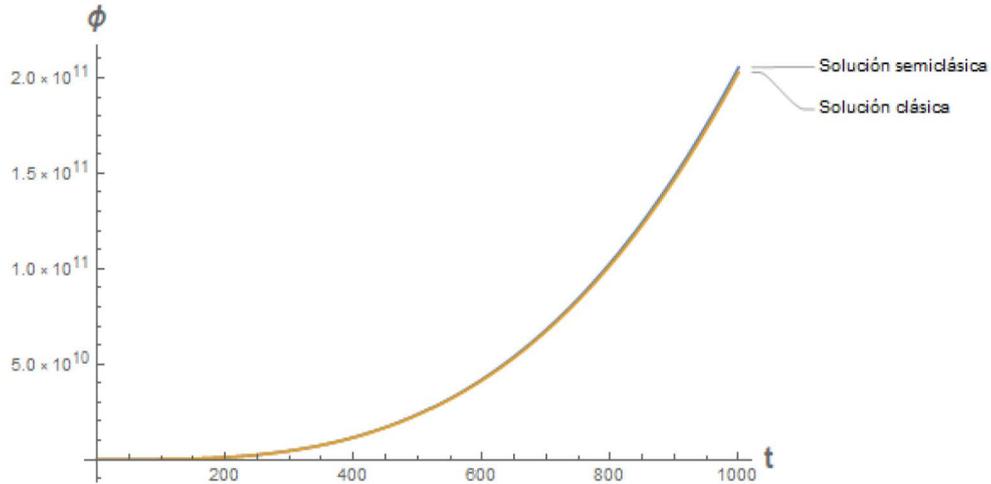


Figura 5: : Comparación de la evolución clásica y semiclásica de la función  $\phi(t)$  para un universo con contenido de materia no relativista, y  $\Lambda = 0.1$ ,  $\gamma = 1$  y  $K = 0$ .

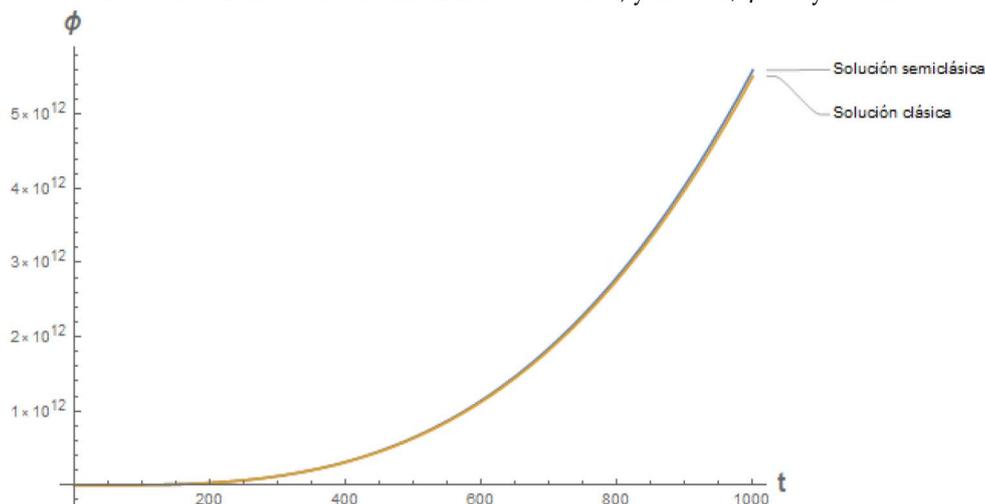
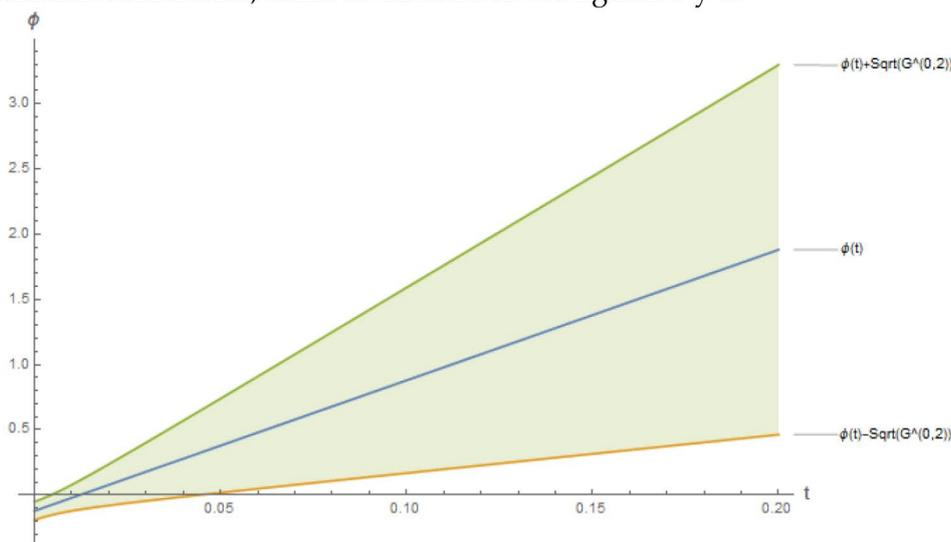
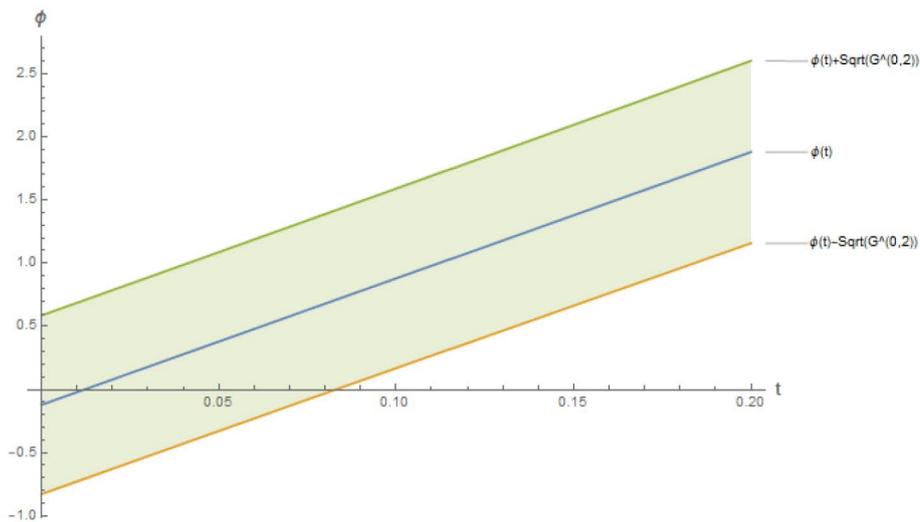


Figura 6: Comparación de la evolución clásica y semiclásica de la función  $\phi(t)$  para un universo con contenido de materia relativista, y  $\Lambda = 0.1$ ,  $\gamma = \frac{4}{3}$  y  $K = 0$ .

De acuerdo con la definición de las dispersiones cuánticas, la variable  $G^{0,2}(t)$  representa el valor esperado de la dispersión de posición  $G^{0,2} := \langle (\hat{q} - q)^2 \rangle$ , con esto se puede construir un cinturón de incertidumbre sobre la trayectoria clásica  $\phi \pm \sqrt{G^{0,2}}$ . Estableciendo las condiciones de frontera para  $\phi(t)$ , se obtiene la evolución semiclásica, como se muestra en las figuras 7 y 8.



**Figura 7:** Cinturón de incertidumbre de la función  $\phi(t)$  para un universo con contenido de materia no relativista, y  $\Lambda = 0.1$ ,  $\gamma = 1$  y  $\sigma = 0.1$ .



**Figura 8:** Cinturón de incertidumbre de la función  $\phi(t)$  para un universo con contenido de materia no relativista, y  $\Lambda = 0.1$ ,  $\gamma = 1$  y  $\sigma = 1$ .

Como se observó anteriormente, el parámetro  $\gamma$  modifica la velocidad de crecimiento de la función  $\phi(t)$ , haciendo que esta sea mayor cuando el contenido de materia es relativista. La solución semiclásica de este sistema muestra que para rangos de tiempo pequeños, la variación de  $\gamma$  no modifica el comportamiento de las soluciones, por lo que, la función semiclásica  $\phi(t)$  y el cinturón de incertidumbre generado por las dispersiones  $G^{a,b}$  se comportan de la misma manera cuando el contenido del universo es materia ordinaria o radiación, como se muestra en las figuras 9 y 10.

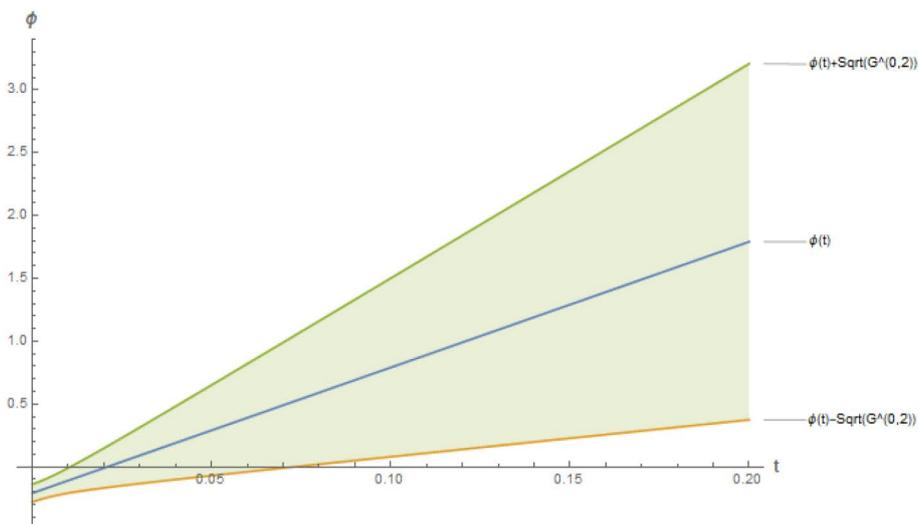


Figura 9: Cinturón de incertidumbre de la función  $\phi(t)$  para un universo con contenido de materia relativista, y  $\Lambda = 0.1$ ,  $\gamma = \frac{4}{3}$  y  $\sigma = 0.1$ .

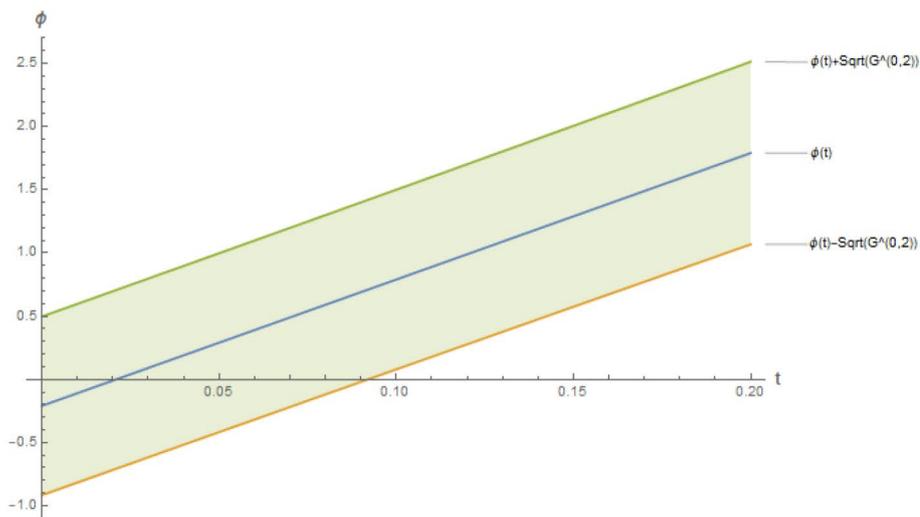
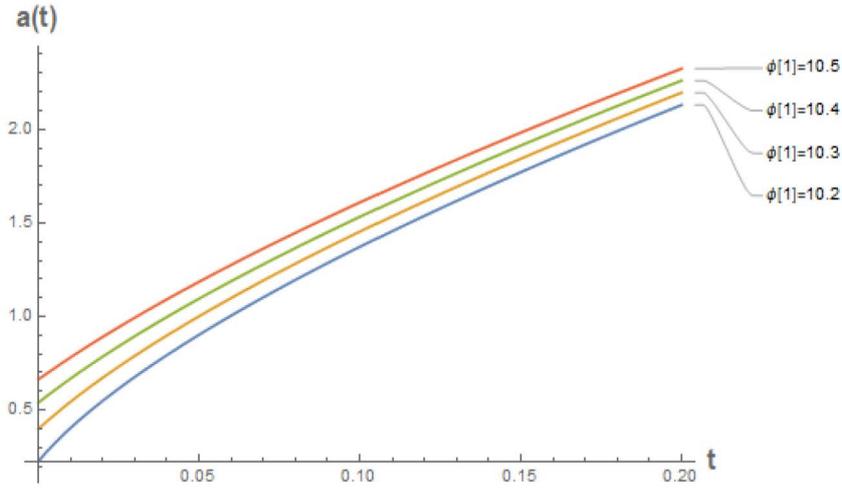


Figura 10: Cinturón de incertidumbre de la función  $\phi(t)$  para un universo con contenido de materia relativista, y  $\Lambda = 0.1$ ,  $\gamma = \frac{4}{3}$  y  $\sigma = 1$ .

Finalmente, se obtiene que para ciertas condiciones de frontera se puede evitar una singularidad, la evolución del factor de escala se muestra en la figura 11.



**Figura 11:** Comparación de la evolución semiclásica del factor de escala  $a(t)$  para diferentes condiciones de frontera  $\phi(t)$  para un universo con contenido de materia no relativista, y  $\Lambda = 0.1$ ,  $\gamma = 1$ .

## 5. El modelo semiclásico del potencial efectivo

El término potencial del Hamiltoniano  $H_{\Lambda\text{CDM}}$  es

$$V(\phi) = -\frac{3}{8}\gamma^2\Lambda\phi^2 + \frac{K}{(3\gamma - 2)}\left(\frac{3\gamma\phi}{2}\right)^{2-\frac{4}{3\gamma}}.$$

Utilizando ec. (13) se obtiene el potencial efectivo  $V_{\text{all}}$ . El Hamiltoniano completo a todo orden es

$$H_{\text{all}} = \frac{1}{2}p_\phi^2 + V_{\text{all}}, \quad (16)$$

con  $V_{\text{all}}$  igual a

$$V_{\text{all}} = \frac{U}{2ms^2} - \frac{3}{8}\gamma^2\Lambda(\phi^2 + s^2) + \frac{K}{2(3\gamma - 2)}\left(\frac{3\gamma}{2}\right)^{2-\frac{4}{3\gamma}}\left((\phi + s)^{2-\frac{4}{3\gamma}} + (\phi - s)^{2-\frac{4}{3\gamma}}\right),$$

Las ecuaciones de movimiento del Hamiltoniano de la ec. (16) son

$$\dot{p}_\phi = \frac{3}{4}\gamma^2\Lambda\phi + \epsilon_0(\phi, s)$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_s &= \frac{U}{Ms^3} + \frac{3}{4}\gamma^2\Lambda s + \epsilon_1(\phi, s), \\ \dot{\phi} &= p_\phi, \\ \dot{s} &= 0,\end{aligned}$$

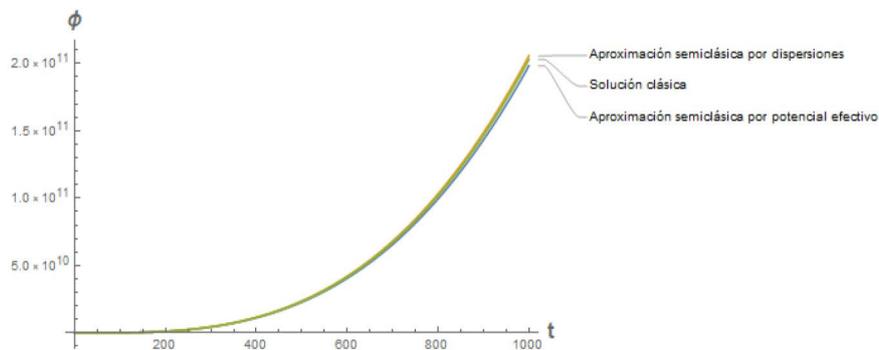
con  $\epsilon_0(\phi, s)$

$$\epsilon_0(\phi, s) = -\frac{K}{2(3\gamma - 2)}\left(2 - \frac{4}{3\gamma}\right)\left(\frac{3\gamma}{2}\right)^{2-\frac{4}{3\gamma}}\left((\phi + s)^{1-\frac{4}{3\gamma}} + (\phi - s)^{1-\frac{4}{3\gamma}}\right),$$

y  $\epsilon_1(\phi, s)$

$$\epsilon_1(\phi, s) = \frac{K}{2(3\gamma - 2)}\left(2 - \frac{4}{3\gamma}\right)\left(\frac{3\gamma}{2}\right)^{2-\frac{4}{3\gamma}}\left((\phi - s)^{1-\frac{4}{3\gamma}} + (\phi + s)^{1-\frac{4}{3\gamma}}\right).$$

La evolución semiclásica para  $\phi(t)$ , utilizando variables canónicas bajo los mismos parámetros de materia y de constante cosmológica propuestos en la sección 2, se muestran en la figura 12 y 13.



**Figura 12:** Comparación de la evolución clásica y semiclásica de la función  $\phi(t)$  para un universo con contenido de materia no relativista, y  $\Lambda = 0.1$ ,  $\gamma = 1$  y  $K = 0$ .

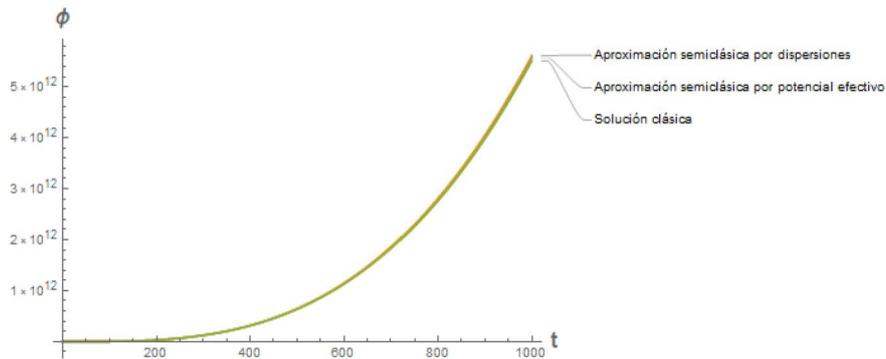


Figura 13: Comparación de la evolución clásica y semiclásica de la función  $\phi(t)$  para un universo con contenido de materia relativista, y  $\Lambda = 0.1$ ,  $\gamma = \frac{4}{3}$  y  $K = 0$ .

La región de incertidumbre se puede observar en la figura 14 y figura 15.

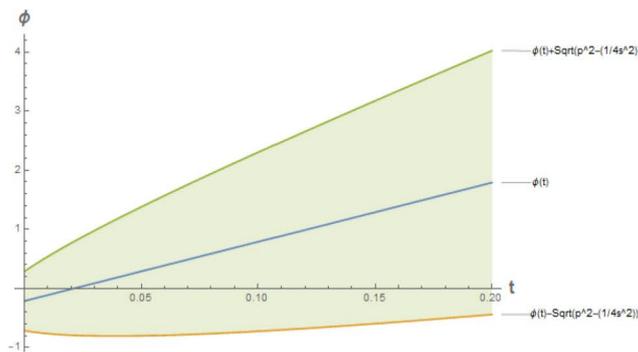


Figura 14: Región de incertidumbre de la función  $\phi(t)$  para un universo con contenido de materia no relativista, y  $\Lambda = 0.1$ ,  $\gamma = 1$  y  $\sigma = 0.5$ .

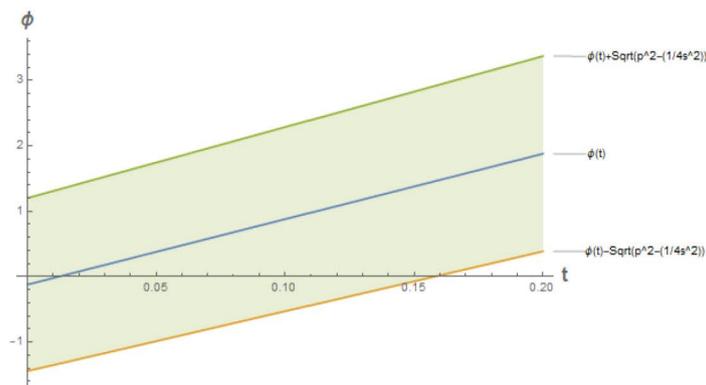


Figura 15: Cinturón de incertidumbre de la función  $\phi(t)$  para un universo con contenido de materia no relativista, y  $\Lambda = 0.1$ ,  $\gamma = 1$  y  $\sigma = 1$ .

Como se encontró en la sección anterior, la singularidad inicial puede ser evitada para una elección en particular de las condiciones de frontera, la evolución se muestra en la figura 16.

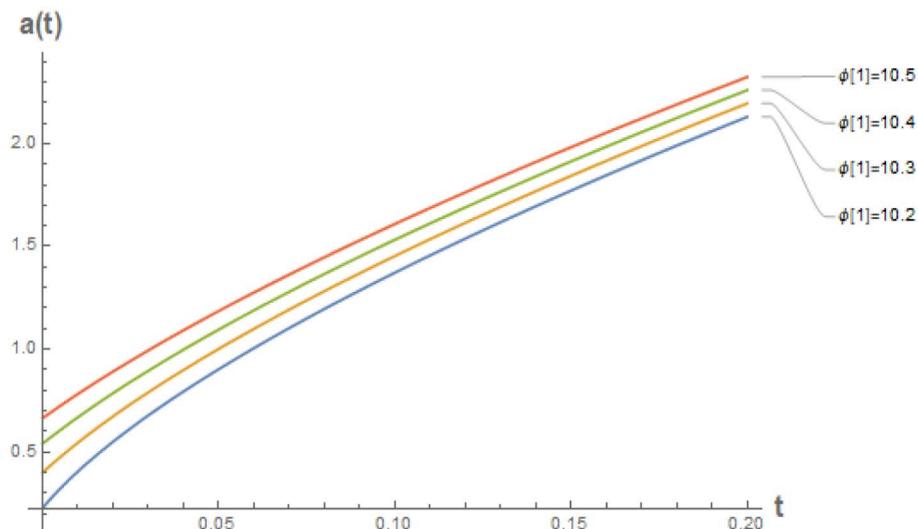


Figura 16: Comparación de la evolución del factor de escala  $a(t)$  para diferentes condiciones de frontera  $\phi(t)$  para un universo con contenido de materia no relativista, y  $\Lambda = 0.1$ ,  $\gamma = 1$  y  $\sigma = 0.5$ .

## 6. Discusiones y conclusiones

Con base en resultados obtenidos en este trabajo, se observa que el factor de escala  $a(t)$ , a través de la función  $\phi(t)$ , describe la evolución del universo. Para valores de  $\Lambda$  positivo,  $\phi(t)$  crece de manera exponencial; para  $\Lambda$  negativo,  $\phi(t)$  tiene un comportamiento oscilante; y para  $\Lambda$  nulo, la función crece de manera lineal. El contenido de materia modifica la velocidad de crecimiento de la función  $\phi(t)$ , que es mayor para radiación que para materia ordinaria.

Se observó también que para tiempos cercanos a  $t = 0$ , la trayectoria de la función  $\phi(t)$  es modificada solamente por el parámetro  $\sigma$ , el cual representa la dispersión en la función de onda Gaussiana de la ec. (13), por lo que, a diferencia del

comportamiento para tiempos grandes, el universo evoluciona de la misma manera sin importar el contenido de materia.

En cosmología cuántica la función de onda contiene toda la información del sistema, de la cual no es posible obtener una interpretación clásica, como las trayectorias. Sin embargo, mediante una formulación efectiva de la mecánica cuántica, es posible obtener ecuaciones dinámicas a partir de un Hamiltoniano que depende de los valores esperados de observables y dispersiones cuánticas. Las diferencias entre la evolución clásica y semiclásica son importantes para determinar el comportamiento a la escala de Planck.

En este modelo, se encontró que las trayectorias clásicas y semiclásicas son muy parecidas, pero no exactamente iguales. Además, se determinó la incertidumbre de la posición de manera numérica, mostrando la naturaleza probabilística de la formulación de momentos y del potencial efectivo. Se muestra gráficamente que la incertidumbre generada para  $\sigma = 0.1$  es menor que para  $\sigma = 1$ .

La singularidad inicial se observa cuando el factor de escala  $a(t)$  tiende a cero en  $t = 0$ . El formalismo de momentos permite obtener la evolución para  $a(t)$  partiendo de condiciones de frontera a tiempos finitos, esto permite evolucionar  $a(t)$  hacia atrás en el tiempo. En este trabajo, se establecieron diferentes condiciones para  $\phi(t)$  y se observó que las trayectorias para el factor de escala no son cero en  $t = 0$ , probando con esto que las fluctuaciones cuánticas son responsables de la remoción de la singularidad inicial.

La descripción de momentos requiere usualmente de truncamientos consistentes para poder realizar un análisis completo. Esto implica la pérdida de cierta información en el régimen cuántico. Por ello, recientemente se ha obtenido una nueva formulación efectiva en términos de variables canónicas, que permite a su vez obtener un potencial cuántico generalizado. Este potencial efectivo evita la necesidad de realizar truncamientos y ha sido utilizado para estudiar efectos de tunelaje cuántico (Aragón-Muñoz, Chacón-Acosta, & Hernández-Hernandez, 2020), modelos en cosmología cuántica (Bojowald, Brizuela, Hernández, Koop, & Morales-Técotl, 2011), el experimento de la doble rendija (Hernandez-Hernandez & Valdez, 2021), tiempos de tunelaje cuántico a través de barreras de potencial (Baytaş, Bojowald, & Crowe, Canonical tunneling time in ionization experiments, 2018) y etapas tempranas del universo a partir de potenciales inflacionarios (Bojowald, Brahma, Crowe, Ding, & McCracken, 2020).

Dada las bondades de esta formulación, existe un amplio rango de sistemas en el que se puede aplicar, por ejemplo, el estudio de plasmas (White & Chance, 1984), polarización en óptica (Sun, Gutiérrez-Rubio, Basov, & Fogler, 2015), modelos termodinámicos (Antoniazzi, Califano, Fanelli, & Ruffo, 2007), entre otros.

## Bibliografía

- Akarsu, Ö., Barrow, J. D., Board, C. V., Uzun, N. M., & Vazquez, J. A. (2019). Screening  $\Lambda$  in a new modified gravity model. *The European Physical Journal C*, 1-18.
- Akarsu, Ö., Katirci, N., Kumar, S., Nunes, R. C., Öztürk, B., & Sharma, S. (2020). Rastall gravity extension of the standard  $\Lambda$ CDM model: theoretical features and observational constraints. *The European Physical Journal C*, 1-20.
- Alho, A., Ugglá, C., & Wainwright, J. (2019). Perturbations of the Lambda-CDM model in a dynamical systems perspective. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 045.
- Antoniazzi, A., Califano, F., Fanelli, D., & Ruffo, S. (2007). Exploring the thermodynamic limit of Hamiltonian models: Convergence to the Vlasov equation. *Physical review letters*, 150602.
- Aragón-Muñoz, L., Chacón-Acosta, G., & Hernández-Hernandez, H. (2020). Effective quantum tunneling from a semiclassical momentous approach. *International Journal of Modern Physics B*, 2050271.
- Baytaş, B., Bojowald, M., & Crowe, S. (2018). Canonical tunneling time in ionization experiments. *Physical Review A*, 98(6), 063417.
- Baytaş, B., Bojowald, M., & Crowe, S. (2019). Effective potentials from semiclassical truncations. *Physical Review A*, 042114.

- Benisty, D., Guendelman, E. I., Nissimov, E., & Pacheva, S. (s.f.).  $\Lambda$ CDM as a Noether Symmetry in Cosmology. *modern cosmology*, 45.
- Bojowald, M. (2001). Absence of a singularity in loop quantum cosmology. *Physical Review Letters*, 5227.
- Bojowald, M. (2011). *Quantum cosmology: a fundamental description of the universe*. Springer Science & Business Media.
- Bojowald, M., & Skirzewski, A. (2006). Effective equations of motion for quantum systems. *Reviews in Mathematical Physics*, 713-745.
- Bojowald, M., Brahma, S., Crowe, S., Ding, D., & McCracken, J. (2020). Multi-field inflation from single-field models. *arXiv preprint arXiv:2011.02843*.
- Bojowald, M., Brizuela, D., Hernández, H. H., Koop, M. J., & Morales-Técotl, H. A. (2011). High-order quantum back-reaction and quantum cosmology with a positive cosmological constant. *Physical Review D*, 043514.
- Carroll, S. M. (2019). *SPACETIME AND GEOMETRY An introduction to general relativity*. Cambridge University Press.
- Cervantez-Cota, J., & Smoot, G. (October de 2011). Cosmology today- A brief review. *AIP Conference Proceedings*, 1396(1), 28-52.
- Cornalba, L., & Costa, M. S. (2002). A new cosmological scenario in string theory. *Physical Review D*, 066001.
- Cornalba, L., Costa, M. S., & Kounnas, C. (2002). A resolution of the cosmological singularity with orientifolds. *Nuclear Physics B*, 378-394.
- Davies, P., & Unwin, S. (1981). Why is the cosmological constant so small? *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 147-149.
- Gell-Mann, M., & Hartle, J. B. (1996). Quantum mechanics in the light of quantum cosmology. *In Foundations Of Quantum Mechanics In The Light Of New*

- Technology: Selected Papers from the Proceedings of the First through Fourth International Symposia on Foundations of Quantum Mechanics*, 347-369.
- Green, S. R., & Wald, R. M. (2014). How well is our universe described by an FLRW model? *Classical and Quantum Gravity*, 234003.
- Hernandez-Hernandez, H., & Valdez, J. (2021). Semiclassical trajectories in the double-slit experiment. *arXiv:2106.03280*.
- Kamenshchik, A. Y. (2013). Quantum cosmology and late-time singularities. *Classical and Quantum Gravity*, 30, 173001.
- Mukhanov, V. (2005). *Physical foundations of cosmology*. United Kingdom: Cambridge university press.
- Ren, J., & Meng, X. H. (2006). Modified equation of state, scalar field, and bulk viscosity in Friedmann universe. *Physics Letters B*, 5-12.
- Ren, J., Meng, X. H., & Zhao, L. (2007). Hamiltonian formalism in Friedmann cosmology and its quantization. *Physical Review D*, 043521.
- Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., Clocchiatti, A., Diercks, A., Garnavich, P. M., ... Tonry, J. (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 1009.
- Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., Clocchiatti, A., Diercks, A., Garnavich, P. M., ... Tonry, J. (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 1009.
- Ryden, B. (2017). *Introduction to cosmology*. United Kingdom: Cambridge University Press.
- Sun, Z., Gutiérrez-Rubio, Á., Basov, D. N., & Fogler, M. M. (2015). Hamiltonian optics of hyperbolic polaritons in nanogranules. *Nano letters*, 4455-4460.
- Velasquez-Toribio, A. M., & dos R Magnago, A. (2020). Observational constraints on the non-flat  $\Lambda$ CDM model and a null test using the transition redshift. *The European Physical Journal C*, 1-10.
- Vilenkin, A. (1995). Predictions from quantum cosmology. *Physical Review Letters*, 846.
- White, R. T., & Chance, M. S. (1984). Hamiltonian guiding center drift orbit calculation for plasmas of arbitrary cross section. *The Physics of fluids*, 2455-2467.