Cálculo variacional y el principio de mínima acción en física

Ing. Francisco Javier Orozco Beiza y Dr. Juan Daniel Reyes Pérez

Universidad Autónoma de Chihuahua / Facultad de Ingeniería
FINGUACH Año 6, Núm. 21, septiembre - noviembre del 2019

En diversas situaciones cotidianas o de ingeniería suele ser común escuchar la palabra óptimo. Las personas quieren optimizar su tiempo o el rendimiento de combustible de su auto y las industrias requieren optimizar sus recursos y materiales. Optimizar generalmente implica maximizar o minimizar algo. Por ejemplo, en la industria de diseño automotriz, un problema típico de optimización es el de maximizar el volumen o capacidad de la carrocería con el material mínimo posible. Como éste hay una infinidad de ejemplos en donde se busca obtener el mejor resultado con los mínimos recursos.

Nuestro primer acercamiento formal a los problemas de optimización seguramente fue cuando trabajamos con aplicaciones del cálculo diferencial para obtener los extremos de una función con una o varias variables y determinar sus valores máximos o mínimos. Un problema de libro de texto (y una versión simplificada del problema de la carrocería de un auto) es el de encontrar las dimensiones de un rectángulo hecho con un pedazo de alambre de longitud fija, de tal modo que el área encerrada por el rectángulo sea máxima. Si la longitud de la base del rectángulo es su altura tendrá dimensiones y por tanto su área será una función de la longitud de la base dada por la expresión:

$$a/2 - x$$

$$A(x) = x(a/2 - x) = xa/2 - x^2$$

$$A'(x) = a/2 - 2x = 0$$

$$x = a/4$$

$$(t_1, t_2)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

$$\int_V \mathcal{L} d^3x dt$$

El valor que maximiza el área lo obtenemos igualando a cero la derivada de esta función, es decir la solución que maximiza el área es un cuadrado.

Pero ¿qué pasa si ahora tenemos la libertad de escoger no un cuadrado sino una figura arbitraria? (podemos doblar nuestro alambre de forma arbitraria, por ejemplo formando una estrella, un óvalo, entre otros). Para este problema general, el área encerrada por el alambre no depende de un simple número x, sino de algo más complicado, una función f(t) que describe la forma exacta de la figura. Para resolver este problema necesitamos encontrar máximos y mínimos, no de funciones A(x) de una variable numérica x, sino de funciones A(f). Este es el dominio del cálculo variacional que lidia con funcionales (funciones que dependen de otras funciones) y que generaliza el concepto de derivada que mide la razón de cambio de un funcional, no al variar un número sino toda una función.

Otro ejemplo clásico de minimización de funcionales es el de determinar la forma de una película jabonosa que se forma dada una frontera. Las superficies minimales forman un área de estudio en las matemáticas, en donde se estudian superficies de tensión superficial mínima como la catenoide (Figura 1); podemos ver que entre todas las superficies posibles que pueden unir las fronteras dadas solo existe una en particular que hace que la tensión superficial de la burbuja de jabón sea mínima (Galaz, 2014).

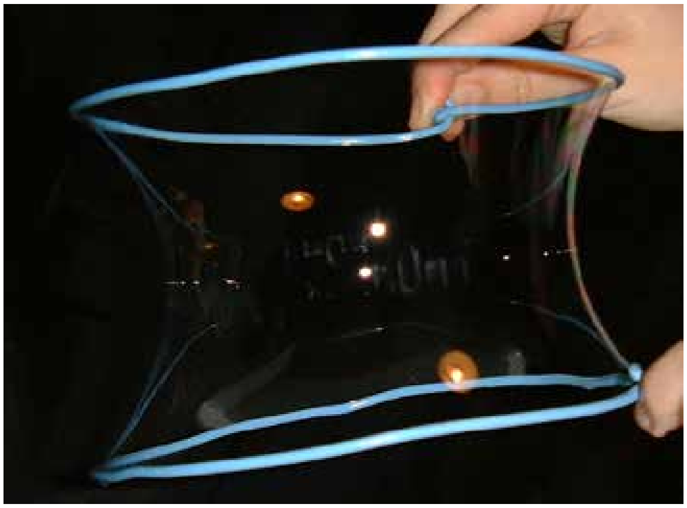

Figura. 1. Catenoide de jabón entre dos fronteras.

El cálculo variacional tiene aplicaciones en distintos problemas prácticos y teóricos en ingeniería, economía y matemáticas, pero resulta aún más fundamental en nuestra descripción actual del universo y las leyes de la física. La naturaleza también tiende a minimizar o encontrar soluciones óptimas. En el siglo XVIII teóricos como Lagrange y Hamilton observaron un hecho peculiar y profundo de la naturaleza: las trayectorias de las partículas físicas (descritas por funciones matemáticas) son tales que minimizan una cantidad física S llamada acción (Lanczos, 1949). Más específicamente, la acción de una partícula en un intervalo de tiempo [] es la integral en el tiempo que corresponde a la diferencia de energía cinética de la partícula menos su energía potencial. La diferencia de energía cinética y energía potencial es llamada el Lagrangiano de la partícula y entonces la acción está dada por la fórmula.

Esta cantidad física asociada a la partícula tiene unidades de energía por tiempo y depende matemáticamente de la trayectoria seguida por la partícula. Dado este hecho de la naturaleza, podemos adoptar una nueva perspectiva sobre el movimiento de una partícula, por ejemplo una bala de cañón y concluir que la bala sigue una trayectoria parabólica (ignorando el viento) porque ésta es precisamente la trayectoria que minimiza su acción S. Si calculamos la energía cinética que tendría la misma bala de cañón moviéndose en *zigzag*, restamos su energía potencial e integramos en un intervalo de tiempo, el resultado sería una cantidad mayor para la acción S. La trayectoria en *zigzag* para el movimiento de la bala no minimiza su acción y por eso nunca vemos una bala de cañón moviéndose en *zigzag* después de ser disparada. De igual forma podemos pensar que la tierra se mueve en una trayectoria elíptica alrededor del sol y no en una trayectoria rectangular o en forma de corazón, porque la trayectoria elíptica da un valor para la acción menor que cualquiera de las otras trayectorias.

Aunque esta perspectiva pudiera parecer más complicada e innecesaria, comparada al menos con las leyes básicas del movimiento en mecánica resumidas por Newton el enorme poder de este enfoque es su generalidad casi universal. Las leyes de Newton para una pelota o bala de cañón no se generalizan a un electrón o a un fotón. Por otro lado, el llamado principio de mínima acción de Hamilton sí puede generalizarse, no solo a todas las partículas macroscópicas sino también a las microscópicas y sus interacciones. Durante el siglo pasado, los físicos descubrieron que todas las partículas elementales y las interacciones fundamentales que conocemos entre ellas, como el electromagnetismo y la fuerza gravitacional tienen una acción asociada y se comportan de tal manera que siempre tienden a minimizar esta acción. El campo eléctrico y el rayo producido en una tormenta tienen esa configuración porque es precisamente esta configuración del campo la que minimiza su acción.

Uno de los problemas en física teórica es encontrar la forma de la acción asociada con cada interacción de la naturaleza o sistema físico. Para el caso de los campos como el electromagnético o la gravitación, que a diferencia de una partícula localizada en un punto se encuentran o llenan todo el espacio, la acción es también una integral pero ahora en el tiempo y en el espacio: una integral múltiple de volumen sobre una región.

Nuestro entendimiento actual y más profundo de las leyes físicas está dado en términos de un principio de mínima acción. De hecho, fue esta perspectiva la que permitió desde el siglo pasado el descubrimiento de nuevas partículas elementales como el famoso bosón de Higgs y el entendimiento de las fuerzas nucleares (Quigg, 1997). La acción no solo codifica las trayectorias o configuraciones de los campos, sino también sus simetrías y cantidades conservadas como la energía.

A pesar de todo esto y sorprendentemente aún existen muchas preguntas y aspectos por explorar sobre estas formulaciones. En particular, el papel que juega el borde o frontera de la región de integración en las acciones de los campos electromagnéticos o gravitacionales. Para ilustrar en el caso electromagnético, el comportamiento del campo en estas fronteras puede proporcionar información sobre lo que pasa dentro de la región, por ejemplo la cantidad de carga contenida dentro de la misma. En el caso gravitacional, estas fronteras pueden coincidir o modelar agujeros negros y proporcionarnos información sobre los mismos (Ashtekar, 1998).

Actualmente en la Facultad de Ingeniería de la UACH se investigan varias de estas implicaciones para acciones de la teoría electromagnética y para el estudio de fenómenos gravitacionales y agujeros negros, esto como temas de tesis de la Maestría en Ciencias Básicas y como parte del proyecto PRODEP "Gravitación cuántica y agujeros negros".

Referencias:

Ashtekar A *et. al.* (1998) Isolated horizons: A generalization of black hole mechanics. Class.Quant.Grav.16:L1-L7. arXiv:gr-qc/9812065v1.

Corichi A, Reyes J. (2016) Weakly isolated horizons: First order actions and gauge symmetries. 10.1088/1361-6382/aa631c. arXiv:1612.01462v1.

Galaz F. (2014). Superficies minimales. Miscelanea matemática 39. pp. 31-48.

Lanczos C. (1949) The variational principles of mechanics. Dover. 4 ed. Canadá.

Quigg C. (1997) Gauge theories of the strong, weak, and electromagnetic interactions. ABP. 1 ed. Illinois EUA.